Линейные харатеристики графов

Алексей Суворов

Здесь будет приведено несколько теорем, в том числе и моих, объединенных общей целью: оценками числа независимости и хроматического числа всяких интересных семейств графов (прежде всего дистанционных, но не только). Также тут будут попытки построения общей теории вокруг всего этого.
Здесь есть несколько частей, сильно различающихся между собой, но у них есть определенное сходство и общая теория.
Какое наименьшее число ребер может быть в графе с данным числом независмости и вершин? Ответ на этот вопрос дает теорема Турана.
Но что, если нас интересуют не все возможные графы, а некоторое их подмножество? Например, дистанционные(опр. далее).
На данный момент это открытая проблема. Также нас будут интересовать множества графов, не содержащих некоторый конечный набор подграфов.
(Например, графы без K_3 или графы без K_4, где K_n - клика на n вершинах). Эти задачи весьма полезны в оценках для дистанционных графов, но интересны и сами по себе.
Здесь я опишу некоторые базовые понятия, связанные с этими задачами, а также докажу несколько теорем.

Правильной покраской графа называем $f : V(G) \longrightarrow C$ такое, что $f(a)! = f(b)$ для любых двух смежных вершин a и b.
Хроматическим числом графа G (или $\xi(G)$) называем наименьшее N такое, что вершины графа можно правильным образом покрасить в N цветов.
Независимым множеством графа G называем подмножество его вершин такое, что никакие две из них не соединены ребром.
Числом независимости графа G (или $\alpha(G)$) называем размер наибольшего независимого множества.
Числом Рамсея $R(x, y)$ называем минимальное такое n, что в любом полном графе с синими и зелеными ребрами найдется или синяя клика размера x, или зеленая клика размера y.
Подграфом графа G называем граф, который получается из него выбрасыванием некоторых ребер и вершин.
Изоморфными называем два графа, между множествами вершин которых существует биекция, сохраняющая свойство смежности.

Объединением двух графов называем граф, множество вершин которого есть непересекающаяся совокупность их множеств вершин, а ребром соединены те и только те вершины, которые соответствовуют одному исходному графу и смежны в нём.
Рассмотрим четыре численных свойства графа:

1. Число вершин
2. Число рёбер
3. Число независимости
4. Число компонент связности

Все они облададают следующим интересным свойством(*): характеристика объединения равна сумме характеристик исходных графов.
На самом деле их объединяет и много что ещё, но об этом далее.
Будем называть эти четыре свойства линейными характеристиками графа. (Это не совсем формальное определение. Скорее, это удобность работы с ними некоторым набором методов)
Есть и другие характеристики графа, которые "линейны"(например, в графах с разноцветными ребрами есть ещё количества ребер каждого цвета).

Цветным графом(гиперграфом) называем граф, в котором у вершин и ребер есть цвета.
Набор графов с запретами - совокупность всех графов, у которых никакой подграф не изоморфен запрещенному.

Теорема - Набор графов с запретами содержит графы со сколь угодно большим отношением числа вершин к числу независимости тогда и только тогда, когда все запрещенные подграфы содержат циклы.

Доказательство.

1. Рассмотрим граф, у которого это отношение $> n$. Покажем, что для любого дерева есть такое n , что в любом таком графе оно будет фигурировать как подграф. Возьмём n равное числу вершин в дереве.
2. В нашем графе есть подграф, у которого степени всех вершин $> n$.
3. Возьмём в этом подграфе произвольную вершину и начнём отстраивать дерево от неё. В любой момент размер уже построенного поддерева меньше степени любой вершины, а значит у любой вершины есть сосед вне этого поддерева, и поддерево можно увеличить в любую сторону.

□

Доказательство.

1. Теперь возьмём случайный граф на n вершинах с ребром с вероятностью $\frac{(\ln n)^2}{n}$. Несложно убедиться, что вероятность возникновения в нём двух пересекающихся циклов размера $\leq x$ или антиклики размера $> \frac{n}{y}$ при фиксированных x, y и $n \longrightarrow \infty$ стремится к 0, а значит есть граф, в котором нет ни того ни того. (Это некоторый известный результат, но я пока что не нашёл ссылку)
2. Теперь, когда никакие два малых цикла не пересекаются, выбросим из каждого возникшего малого цикла по вершине.
3. Т.е. есть граф со сколь угодно большим коэффициентом независимости, не содержащий циклов меньше наперёд заданного размера. Такой граф может удовлетворять любому наперёд заданному набору запретов, если во всех запрещённых подграфах есть циклы.

□

Несложно заметить следующее: если существует граф с

характеристиками $(a_1...a_n)$, то существует и граф с характеристиками $(x \cdot a_1...x \cdot a_n)$ для любого натурального x. (Т.к можно продублировать исходный граф x раз)
Поэтому логично факторизовать совокупности характеристик по домножению на положительную константу.
В совокупности с (*) предыдущее свойство дает нам следующее: Для любых двух графов G_a и G_b и коэффициентов a, b существует такой граф G, что для любой его линейной характеристики f выполнено
$f(G) = a \cdot f(G_a) + b \cdot f(G_b)$
Это означает, что если две точки лежат в проективизации, то и все рациональные точки на отрезке между ними тоже в ней лежат
Теорема Проективизация множества достижимых характеристик выпуклая.

Доказательство.

Все внутренние рациональные точки отрезка между лежащими точками тоже лежат.

Определение рациональной выпуклости выполнено. □

Пусть у нас есть n вершин(основание) и надграф к ним. Тогда можно построить следующую функцию F: Каждому набору значений вершин основания мы соспоставляем максимальное количество вершин надграфа, которые можно к ним добавить так, чтобы получилось независимое множество.
Разрешённым значением аргумента надграфной функции F называем такое значение, в котором нельзя так убрать k единиц, чтобы её значение увеличилось не менее чем на k.
Эквивалентными называем надграфункции, у которых одинаковые разрешенные аргументы, и одинаковые значения на всех них (позже мы узнаем, что второе условие избыточно)
Эквивалентными с точночтью до константы называем надграфункции, у которых одинаковые разрешенные аргументы, и разность значений на всех них одна и та же. *Склейкой* двух надграфункций называем граф, который получается, если к графу из нескольких независимых вершин присоединить две эти надграфункции с учетом порядка вершин.
Теорема Пусть есть четыре надграфункции A, B, C, D. $A = B, C = D$. И графы $A + C$, $B + D$ турановские. Тогда графы $A + D$, $B + C$

также турановские, и $\alpha(A + C \ \& \ B + D) = \alpha(A + D \ \& \ B + C)$

Доказательство.

1. Построим соответствия между максимальными множествами во всех четырех склейках, совместив соответствия для соответствующих функций
2. Тогда для каждой склейки число независимости будет равно числу независимости склейки калиброванных надграфункций (для всех одни и те же) и констант(и там и там получится сумма четырех констант для A, B, C, D).
3. Т.о. равенство чисел независимости понятно.
4. Теперь допустим, что одна из итоговых склеек не турановская.
5. Тогда в ней есть лишнее ребро
6. Выбросим его, и $\alpha(A + D \ \ \& \ \ B + C)$ увеличится на 1
7. Сделаем обратную переклейку. α не изменится
8. Вернём выброшенное ребро на место. α опять не изменилось, так как после этого получился турановский граф,
9. Таким образом, число независимости исходной пары склеек равно самому себе плюс один. Противоречие, Ч.Т.Д

(опр.2)Эквивалентными с точночтью до константы называем надграфункции, у которых одинаковые разрешенные аргументы.

Теорема. Два определения эквивалентны

Доказательство.

1. Нам нужно доказать, что любые две монотонные функции, у которых одинаковые наборы разрешенных значений, различаются в разрешенных значениях на константу.
2. Откалибруем функции (чтобы 0 в 0)
3. Будем увеличивать запрещенные значения, пока это возможно (понятно, что верность доказываемого не поменяется)
4. Теперь любое значение однозначно восстанавливается по предыдущим и информации о его запрещенности.
5. Значит, у нас функции просто совпали
6. Ч.Т.Д

□

Рассмотрим двумерное векторное пространство над действительными числами. И билинейную функцию $F((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2$ Расстоянием между точками называем корень из квадрата вектора между ними. (с точностью до перемены знака) Расстояние может быть мнимым, это нормально. Построим граф, вершины которого это точки нашей плоскости с псевдометрикой, а рёбрами соединяются точки на расстоянии один. Возникает естественный вопрос: а какое у этого графа хроматическое число?

Этот вопрос может оказаться даже сложнее, чем хроматичекое число евклидовой плоскости, не изветсное на данный момент. Добавим дополнительное условие: пусть каждая точка лежит внутри некоторого одноцветного связного множества, не лежащего на одной прямой. (Этому свойству удовлетворяет практически любая естественная покраска. В частности, любая покраска, при которой плоскость делится на одноцветные сектора ненулевой площади) В таком случае можно показать, что наш граф невозможно покрасить в конечное число цветов.

1. Длина вектора (1,1) в нашей псевдометрике равна 0. Есть и другие ненулевые вектора нулевой длины
2. Препдоложение индукции: никакую параллельную вектору нулевой

длины бесконечную полуполоску нашей плоскости нельзя покрасить в N цветов. (Полоска - область между двумя параллельными прямыми. Полуполоска - одна из двух частей полоски, на которые она делится прямой, не параллельной ее краям)

3. База: полоску, как непустой граф, нельзя покрасить в 0 цветов
4. Из этого следует искомое утверждение, т.к если часть не красится, то целиком граф не покрасится тем более.
5. Предположим, что верно для N-1 и докажем для N:
    1. Пусть u - некоторый вектор, параллельный полоске.
    2. Выберем две точки A и B так, что их можно соединить одноцветной кривой k, и AB не параллельно полоске. (если это невозможно, то все одноцветные области лежат на прямых, параллельных полоске, что противоречит дополнительному условию)
    3. рассмотрим подполоску между прямыми, параллельными исходной полоске и проходящими через K и L.
    4. Обрежем её так, чтобы для любой точки C в остатке проекция BC на u вдоль AB была по длине не меньше $q \cdot u$, где q - некторый коэффициент, который мы узнаем позже.

5. Возьмём произвольную точку C в остатке, и покажем, что она другого цвета, чем k. Тогда остаток не покрасится по предположнию индукции в $N-1$ цвет, и это без цвета кривой k. Т.о. исходная полоска не покрасится в N цветов, и мы докажем искомое.
6. Выберем из A и B точку, проекция вектора от которой до C больше. Пусть без ограничения общности это A
7. Тогда $AC = a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{u}$, где $a \in [0.5, 1], b > q$
8. $AC^2 = a^2 \cdot \overrightarrow{AB}^2 + b^2 \cdot \overrightarrow{u}^2 + a \cdot b \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}$
9. Первое слагаемое ограниченно, второе равно нулю, а третье линейно возрастает от b. При достаточно большом q оно будет не меньше любого наперед заданного значения.
10. Пусть D - пересечение k и прямой через C параллельно полоске. CD = 0.
11. По теореме о промежуточном значении на кривой k есть точка E такая, что CE = 1. Значит, E другого цвета, чем k. ЧТД

Заметим, что каждой точке (x, y) нашей плоскости мы можем сопоставить точку (x, iy) комплексной плоскости, и длины сопоставленных отрезков тогда будут равны. Таким образом, наша плоскость вкладывается в коплексную, и полученная оценка верна и

для комплексной плоскости.
У меня есть гипотеза, что дополнительное условие на самом деле необязательно, и хроматическое число комплексной плоскости действительно равно бесконечности.
В таком случае это весьма интересно, т.к. у евклидовых пространств хроматическое число конечно для всех размерностей, а у комплексных и у пространств с знакопеременным квадратом вектора в размерности один конечное, а во всех больших бесконечное. Пусть есть два графа A и B. Слабым произведением мы называем граф, множество вершин которого есть множество пар вершин из A и из B, соединяемые ребром в том и только в том случае, когда обе проекции этой пары это смежные либо совпадающие вершины.
Теорема $\alpha(A * B) \leq R(\alpha(A) + 1, \alpha(B) + 1) - 1$, где $R(x, y)$ - число Рамсея.

Доказательство.

1. Покрасим все уже имеющиеся ребра графов в черный цвет.
2. Дополним A до полного графа синими, а B - зелёными ребрами.
3. Тогда в $A * B$ у каждого антиребра есть синяя или зеленая проекция.
4. Заменим каждое антиребро $A * B$ ребром цвета какой-нибудь его проекции.
5. Допустим, что утверждение теоремы неверно.
6. Тогда в $A * B$ есть сине-зеленая клика размера $R(\alpha(A) + 1, \alpha(B) + 1)$
7. В ней по определению числа Рамсея есть или синяя $K_{\alpha(A)+1}$, или зеленая $K_{\alpha(B)+1}$.
8. Любая из них может быть спроецирована в соответствующий граф, и перейдёт при этом в независимое множество, на 1 большее максимального. Противоречие, теорема доказана.

□