Метод альтернирующих проекций

Платон Хаматов

18 May 2025

Введение

У некоторых задач оптимизации есть удобные геометрические интерпретации. Иногда геометрическая интерпретация позволяет упростить задачу, а иногда и вовсе дает явный метод ее решения, пусть и не всегда эффективный.
Нахождение расстояния между двумя компактами в метрическом пространстве - типичный пример задачи оптимизации, сформулированной в геометрических терминах.
Оказывается, что некоторые задачи могут быть так или иначе сведены к упомянутой.
Для ее решения оказывается полезным представленный метод.

Общая постановка задачи

Пусть нам дано некоторое метрическое пространство (X, ρ) и два его компактных подпространства A и B. Далее:

- $\text{dist}(x, Y)$ - расстояние от точки x до множества Y
- $\text{dist}(Y, Z)$ - расстояние между множествами Y и Z

Задача: в силу того, что A - компакт, B - компакт, $A \times B$ - тоже компакт, ρ -непрерывна как функция из $X \times X$ в $\mathbb{R}_+$; мы можем найти точки $a^* \in A$, $b^* \in B$ такие, что:

$$\text{dist}(A, B) = \rho(a^*, b^*) = \min_{a \in A,\ b \in B} \rho(a, b)$$

Метод альтернирующих проекций

Допустим мы умеем для всякой точки x и для всякого компактного подпространства Y находить такую точку $y \in Y$, что $\mathrm{dist}(x, Y) = \rho(x, y)$ - метрическую проекцию x на Y. Тогда можно предложить следующий алгоритм:

- Выберем произвольно точки $a_0 \in A$, $b_0 \in B$.
- Пусть нам дана пара точек a_i, b_i. Найдем b_{i+1} - метрическую проекцию a_i на B.
- Теперь найдем a_{i+1} - метрическую проекцию b_{i+1} на A.
- Если необходимая точность не достигнута, повторим шаги для пары точек (a_{i+1}, b_{i+1})

Последовательность $d_n = \rho(a_n, b_n)$ убывает и ограничена снизу нулем. Таким образом, она имеет какой-то конечный предел.

Сходимость

Хотелось бы, чтобы предел последовательности $d_n = \rho(a_n, b_n)$ был в точности равен расстоянию между A и B. К сожалению в общем случае это неверно.
Если A и B - выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$, то d_n независимо от выбора начальных точек будет сходиться к расстоянию между A и B.
В общем случае d_n всегда стремится к какому-то локальному минимуму сужения ρ на $A \times B$.

Алгоритм Gershberg-Saxton

Постановка задачи

Пусть задана некоторая финитная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Нам известны значения модуля функции, а также модули значений её преобразования Фурье во всех точках прямой. Задача: восстановить f.

После дискретизации задача переформулируется так:

- Известны модули компонент некоторого комплексного вектора $x_i = r_i e^{i\varphi_i}, i = 1, \ldots, n$
- Известны модули компонент его преобразования Фурье $y_i = s_i e^{i\psi}, i = 1, \ldots, n$

Нужно восстановить оба вектора. Задачу можно переформулировать.
При известных r_i и s_i нужно найти φ, ψ, на которых достигается

$$\min_{\varphi,\psi} \|\mathcal{F}(x) - y\|_2$$

где $\mathcal{F}$ - дискретное преобразование Фурье ($\mathcal{F}_i^j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi}{n}(i-1)(j-1)}$).

Алгоритм Gershberg-Saxton

Gershberg и Saxton предложили следующий алгоритм:

- Выбрать начальные фазы φ_i и ψ_i
- Применить преобразование Фурье к x и заменить амплитуды компонент $\mathcal{F}x$ на ρ_k
- Применить обратное преобразование Фурье
- Заменить амплитуды у компонент полученного вектора x на r_k
- Найти $\mathcal{F}x$ и, если точность недостаточна, перейти к шагу 2

Геометрическая модель

Фактически нам нужно найти общую точку у некоторого тора, вложенного в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{F}^{-1}$-образа другого тора.
В точке пересечения множеств реализуется минимум функции, и в такой постановке задачи можно применить метод альтернирующих проекций.
"Выравнивание"амплитуд фактически реализует проектирование, и, соответственно, метод фактически является частным случаем метода альтернирующих проекций.

Постановка основной задачи

Задача

Теперь пусть нам заданы положительные числа $r_i, i = 1, \ldots, n$. Пусть $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$. Нужно найти такие φ_i, что величина $\|\mathcal{F}x\|_\infty$ минимальна.

В таком случае можно воспользоваться алгоритмом, похожим на Gershberg-Saxton:

- Выбрать начальные фазы φ_i
- Применить преобразование Фурье к x и "обрезать"амплитуды образа до некоторого α ($|y_i| = \min\{|y_i|, \alpha\}$), сохраняя фазы
- Применить обратное преобразование Фурье
- Заменить амплитуды у компонент полученного вектора x на r_k
- Найти $\mathcal{F}x$ и, если точность недостаточна, перейти к шагу 2

В качестве α можно выбрать $\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}$.

Геометрическая модель задачи

Задача сводится к нахождению расстояния между некоторым тором в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{F}^{-1}$-образом шара радиуса α в ∞-норме. Проектирование реализуют операции "обрезания"и "выравнивания"амплитуд. Фактически других существенных отличий от предыдущего примера нет. Геометрическая интерпретация позволяет наглядно представить работу алгоритма и обосновать его сходимость.

Источники

- Gerchberg R.W., Saxton W.O. A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures. Optic (Stuttgart) (1972)
- Выпуклая оптимизация : учебное пособие / Е. А. Воронцова, Р. Ф. Хильдебранд, А. В. Гасников, Ф. С. Стонякин. – Москва : МФТИ, 2021.
- Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В.: Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., № 6, с. 1211–1228 (1967)