УДК 519.651, 519.87

Исследование асимптотики функции Беллмана в задачах оптимального управления с особыми режимами второго порядка

О. Айрапетян, Р. Хильдебранд
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский уни

12 мая 2025 г.

Работа посвящена изучению функции Беллмана в задачах оптимального управления. Рассматривается система:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \qquad u \in U = \{u \mid \|u\|_2 \leq 1\},$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Задан целевой функционал в форме:

$$V(t,x) = \inf_u \mathbb{E}\left[\int_t^T \frac{1}{2}\|x(s)\|_2^2\, ds + \Phi(x_T)\right].$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллиана (HJB):

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + H(x, \nabla_x V) = 0.$$

Особый режим второго порядка возникает при $u = 0$, что приводит к вырожденности гамильтониана в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана. Ключевая проблема — анализ устойчивости решений вблизи сингулярных траекторий и построение асимптотических оценок для $V(t,x)$.

В рамках работы был предложен метод регуляризации гамильтониана, где ϵ — малый параметр:

$$H_\epsilon = H + \epsilon \frac{\partial^4 H}{\partial u^4}.$$

Асимптотическое разложение:

$$V(t,x) = V_0(t,x) + \epsilon^{3/2} V_1(t,x) + O(\epsilon^2).$$

Основной член оценивается через расстояние до особой поверхности:

$$V_0(t,x) \sim \operatorname{dist}(x,\Gamma)^{3/2}, \quad \Gamma - \text{особая поверхность}.$$

Для численной оценки верхней границы (доказательство см. в [1]) были разработаны скрипты на Python, использующие метод Левенберга-Марквардта для решения нелинейных уравнений. С помощью метода, параметризованного на 10–15 тестах, получено решение с точностью $1 - 2\%$, что считается достаточно хорошим для данной задачи.

Хорошей идеей является также рассмотрение схемы дискретизации HJB:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \Delta t \cdot H\left(x_j, \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) + \frac{\epsilon \Delta t}{2} \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Пример такой системы:

$$\dot{x} = u^3 - x, \quad |u| \leq 1,$$

с оптимальным управлением:

$$u^* \sim \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^{1/4}.$$

Данный момент основные результаты — получение верхней асимптотики с высокой точностью. Текущие исследования направлены на сравнение полученной асимптотики с альтернативными оценками. При незначительных различиях планируется использовать их линейную комбинацию для улучшения результатов.

Полученные результаты применимы к системам с шумом и частичной наблюдаемостью и анализу устойчивости при негладких управлениях, имея хорошие перспективы интеграции с методами машинного обучения.

Литература

1. Зеликин М.И., Борисов В.Ф. *Теория сингулярных возмущений в оптимальном управлении.* М.: Физматлит, 2008.

2. Fleming W., Soner H. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer, 2006.

3. Lions P.-L. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations.* Birkhäuser, 1982.