

When ExtraGradient meets VR: bridging two giants to boost Vis

Ю. Кабиков¹, Г. Чирков¹
 Г.Л. Молодцов^{1,2}, Д.О. Медяков^{1,2}

¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

²BRAIn Lab

Вариационные неравенства (VI) зарекомендовали себя как мощный инструмент для моделирования и анализа широкого класса прикладных задач. Их применение охватывает такие области, как математическая оптимизация, теория равновесия, reinforcement learning и перспективное направление генеративных состязательных сетей (GAN).

Эффективность стохастических методов в решении VI не была бы такой высокой без методов редукции дисперсии оценок, которая может ограничивать их применимость. В данной работе мы представляем новый стохастический алгоритм с контролируемой дисперсией, разработанный специально для задач вариационных неравенств. Наш подход развивает идею метода *ExtraPAGE* [1], внедряя метод *ExtraSAGA*, основанный на подобном объединении идей *ExtraGradient* и *SAGA* (см. [2]).

Основные теоретические результаты включают строгое обоснование сходимости метода и анализ его вычислительной эффективности. Практическая значимость подтверждается серией экспериментов на стандартных задачах, в том числе на проблеме *denoising* (подавления шума).

Задача VI (Вариационного неравенства):

Найти $z^* \in Z \rightarrow \langle F(z^*), z - z^* \rangle \geq 0$

В нашем исследовании F - сильно монотонный оператор с параметром μ :

$$\langle F(z_1) - F(z_2), z_1 - z_2 \rangle \geq \mu \|z_1 - z_2\|^2 \quad \forall z_1, z_2 \in Z$$

В рамках работы были проделаны эксперименты с методом *ExtraSAGA*, содержащим следующую итерацию:

$$\begin{aligned} z^{t+1/2} &= z^t - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j^t \\ G^t &= F_{i_t}(z^{t+1/2}) - y_{i_t}^t + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j^t \\ y_i^{t+1} &= F_{i_t}(z^{t+1/2}) \text{ for } i = i_t \\ z^{t+1} &= z^t - \gamma G^t \end{aligned}$$

Была получена оценка на сходимость по итерациям $O(\mu^2/L^2)$, которая при допущении – применении предположения *coercivity* дает более сильную оценку - линейную сходимость $O(\mu/L)$, о которой и будет рассказано на конференции.

Литература

- [1] Molodtsov Gleb and Parfenov Valery and Petrov Egor and Evseev Grigoriy and Medyakov Daniil and Beznosikov Aleksandr. When Extragradient Meets PAGE: Bridging Two Giants to Boost Variational Inequalities, In *Uncertainty in Artificial Intelligence*, PMLR, *arXiv preprint*: ,2025.
- [2] Ahmet Alacaoglu and Yura Malitsky. Stochastic variance reduction for variational inequality methods. In *Conference on Learning Theory*, pages 778–816. PMLR, 2022.