Approximate Support Recovery: Bounds

Лизюра Дмитрий[1]
Руководитель: Фролов Алексей Андреевич[2]

[1]Московский физико-технический институт

[2]Сколковский институт науки и технологий (Сколтех)

20 мая 2025 года

Постановка задачи

Неформально

Имеется сервер и N пользователей, но в каждый момент времени не более $K_\alpha << N$ пользователей активно. Активные пользователи посылают серверу сообщения, однако они “склеиваются“, а ещё к ним добавляется шум. Задача сервера — расшифровать исходные сообщения. Наша задача — минимизировать размер кодовых слов.

Постановка задачи

В частном случае

Пусть:

- M — количество кодовых слов, n — длина сообщения,
- ε — вероятность ошибки,
- $W_1, \dots, W_{K_\alpha} \sim U[M]$ — сообщения пользователей,
- $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{R}^n$ — кодовые слова, $\|c_i\|_2^2 \leq nP$.
- $Y = \sum_{j=1}^{K_\alpha} c_{W_j} + Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ — сообщение, полученное сервером,
- $g : \mathbb{R}^n \to \binom{[M]}{K_\alpha}$ — декодировщик,
- $E_j = \{W_j \notin g(Y))\} \cup \{W_j = W_i \text{ для } i \neq j\}$ — событие ошибки j–ого пользователя.

Схема кодирования называется $(N, M, n, \varepsilon, K_\alpha)$–*кодом с произвольным доступом*, если выполнено

$$\frac{1}{K_\alpha} \sum_{j=1}^{K_\alpha} \mathbb{P}[E_j] \leq \varepsilon.$$

Постановка задачи

Энергией кода называется nP из постановки.
Удельной энергией кода называется величина $\mathcal{E} = \frac{nP}{2\log_2 M}$.
Задача — получить оценку на $\inf\{\mathcal{E}\}$ по всем $(N, M, \varepsilon, \mathcal{E}, K_\alpha)$–кодам с произвольным доступом при фиксированных N, M, ε, K_α.

Первая оценка [1]

Theorem 1. *Fix $P' < P$. There exists an (M, n, ϵ) random-access code for K_a-user GMAC satisfying power-constraint P and*

$$\epsilon \le \sum_{t=1}^{K_a} \frac{t}{K_a} \min(p_t, q_t) + p_0 , \tag{3}$$

where

$$p_0 = \frac{\binom{K_a}{2}}{M} + K_a \mathbb{P}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2 > \frac{P}{P'}\right] , \tag{4}$$

$$p_t = e^{-nE(t)}, \tag{5}$$

$$E(t) = \max_{0 \le \rho, \rho_1 \le 1} -\rho\rho_1 t R_1 - \rho_1 R_2 + E_0(\rho, \rho_1)$$

$$E_0 = \rho_1 a + \frac{1}{2}\log(1 - 2b\rho_1)$$

$$a = \frac{\rho}{2}\log(1 + 2P't\lambda) + \frac{1}{2}\log(1 + 2P't\mu) \tag{6}$$

$$b = \rho\lambda - \frac{\mu}{1 + 2P't\mu}, \quad \mu = \frac{\rho\lambda}{1 + 2P't\lambda} \tag{7}$$

$$\lambda = \frac{P't - 1 + \sqrt{D}}{4(1 + \rho_1\rho)P't}, \tag{8}$$

$$D = (P't - 1)^2 + 4P't\frac{1 + \rho\rho_1}{1 + \rho}$$

$$R_1 = \frac{1}{n}\log M - \frac{1}{nt}\log(t!) \tag{9}$$

$$R_2 = \frac{1}{n}\log\binom{K_a}{t} \tag{10}$$

$$q_t = \inf_{\gamma} \mathbb{P}[I_t \le \gamma] + \exp\{n(tR_1 + R_2) - \gamma\}$$

Идея доказательства:

- Взять $c_1, \ldots, c_M \sim \mathcal{N}(0, P' I_n)$.
- $g(Y) = \arg\min_{S \subset [M]} \left\| \sum_{j \in S} c_j - Y \right\|_2$.

Вторая оценка [2]

Зафиксируем $\mu = \frac{K_\alpha}{N}$ и определим

$$\mathcal{E}^*(M, \mu, \varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \inf\{\mathcal{E} \mid \text{Существует } (N, M, \varepsilon, \mathcal{E}, \mu N) \text{ код}\}.$$

Тогда

Theorem 3 (Bound-MAC). *Fix M, μ and ϵ. Then*

$$\mathcal{E}^*(M, \mu, \epsilon) \leq \inf \frac{b^2}{2 \log_2 M},$$

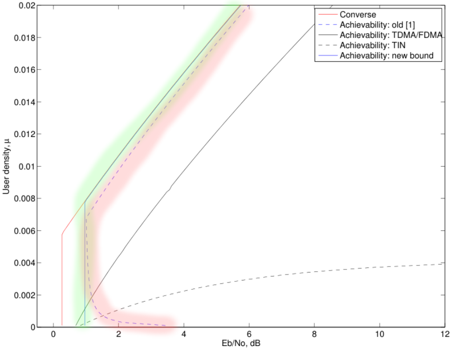
where infimum is over all $b > 0$ such that for all $\theta \in [\epsilon, 1]$ it holds that

$$\theta \mu \ln M + \mu h(\theta) < \max_{\lambda \geq 0} \{ \frac{1}{2} \ln(1 + 2b^2 \theta \mu \lambda) + \lambda \frac{\psi(b, \theta, \mu)^2}{1 + 2b^2 \theta \mu \lambda} - \lambda \}, \qquad (13)$$

where ψ is defined in (12).

Сравнение оценок

Оценки на $\mathcal{E}^*$ для разных μ при $M = 2^{100}$ и $\varepsilon = 10^{-3}$ [2].



Зелёным помечена оценка [2], красным — [1].
Задача — придумать неасимптотический аналог оценки [2].

Техники доказательства

В обеих теоремах используется одинаковая конструкция, но разные методы оценивания:

- В [1] — только неравенство Чернова.
- В [2] добавляется неравенство Гордона (теорема A из [3]).

Теорема

Пусть $\{X_{ij}\}$, $\{Y_{ij}\}$ *— два центрированных гауссовских процесса, удовлетворяющие следующим свойствам:*

- *Для всех* i, j, k *выполнено* $\mathbb{E}|X_{ij} - X_{ik}|^2 \leq \mathbb{E}|Y_{ij} - Y_{ik}|^2$.
- *Для* $i \neq l$ *выполнено* $\mathbb{E}|X_{ij} - X_{lk}|^2 \geq \mathbb{E}|Y_{ij} - Y_{lk}|^2$.

Тогда $\mathbb{E} \min_i \max_j X_{ij} \leq \mathbb{E} \min_i \max_j Y_{ij}$.

Результат

Теорема

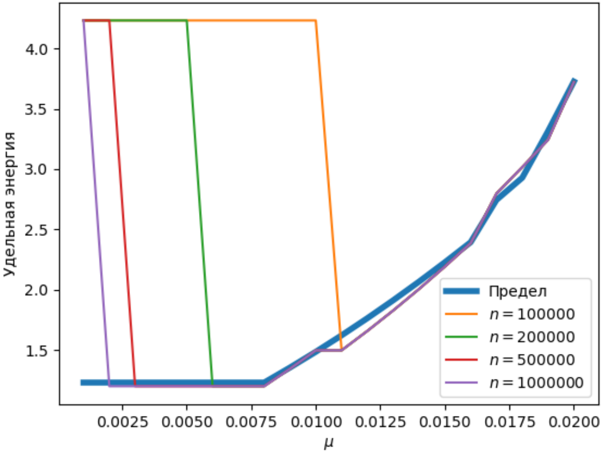
Пусть $\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(Q^{-1}(s))^2/2}$,
$\psi(b,\theta,\mu) = (\sqrt{1+b^2\theta\mu} - b\mu\gamma(\theta))_+$. *Тогда* $\inf\{\mathcal{E}\} \leq \frac{b^2}{2\log_2 M}$,
где инфимум берётся по b*, таким что*

$$\varepsilon \geq \sum_{i=1}^{K_\alpha} \min\left(1, \exp\left(-\frac{n^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+b^2\frac{i}{K_\alpha}\mu} - \psi(b,\frac{i}{K_\alpha},\mu)}{b\mu}\right) + \right.$$

$$+\exp\left(-n\cdot\max_{\lambda\geq 0}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+2b^2\frac{i}{K_\alpha}\mu\lambda\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\lambda\frac{\psi(b,\frac{i}{K_\alpha},\mu)^2}{1+2b^2\frac{i}{K_\alpha}\mu\lambda} - \lambda\right\}\right)\right).$$

Численные эксперименты



Вывод: оценка сходится примерно при $K_\alpha \geq 1000$, но практического смысла не несёт.

Ссылки

Y. Polyanskiy, “A perspective on massive random-access,” *IEEE Information Theory (ISIT), 2017.*

I. Zadik, Y. Polyanskiy, and C. Thrampoulidis, “Improved bounds on Gaussian MAC and sparse regression via Gaussian inequalities,” *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), 2019.*

Gordon, Y. (1988). On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$. In: Lindenstrauss, J., Milman, V.D. (eds) Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol 1317. Springer, Berlin, Heidelberg.