Approximate Support Recovery: Bounds
УДК: 519.212.2

Д.А. Лизюра[1] and А.А. Фролов[2]

[1]Московский физико-технический институт
[2]Сколковский институт науки и технологий (Сколтех)

1 Постановка задачи

1.1 Определения

Для начала неформальная постановка. Имеется сервер и N пользователей, но в каждый момент времени не более $K_\alpha << N$ пользователей активно. Активные пользователи посылают серверу сообщения, однако они “склеиваются“, а ещё к ним добавляется шум. Задача сервера — расшифровать исходные сообщения, а наша задача — минимизировать длину кодовых слов и затраченную энергию на отправку.

Теперь формально. Пусть:

- M — количество кодовых слов, n — длина сообщения,
- ε — вероятность ошибки,
- $W_1, \dots, W_{K_\alpha} \sim U[M]$ — посылаемые пользователями сообщения,
- $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{R}^n$ — кодовые слова,
- $Y = \sum_{j=1}^{K_\alpha} c_{W_j} + Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ — сообщение, полученное сервером,
- $g : \mathbb{R}^n \to \binom{[M]}{K_\alpha}$ — декодировщик,
- $E_j = \{W_j \notin g(Y))\} \cup \{W_j = W_i \text{ для } i \neq j\}$ — событие ошибки j–ого пользователя. Мы можем считать, что совпадающие сообщения — это ошибка, так как обычно размер кодовой книги значительно превосходит количество пользователей.

Схема кодирования называется (N, M, n, ε)*–кодом с произвольным доступом*, если выполнено

$$\frac{1}{K_\alpha} \sum_{j=1}^{K_\alpha} \mathbb{P}[E_j] \leq \varepsilon.$$

Пусть P — такая константа, что все $\|c_j\|_2^2 \le nP$. Назовём *удельной энергией кода* величину $\mathcal{E} = \frac{nP}{2\log_2 M}$. Мы хотим минимизировать $\mathcal{E}$ по всем (N, M, n, ε)–кодам при фиксированных N, n, M, K_α.

Альтернативно можно рассмотреть эквивалентную постановку. Вместо $c_1, \dots, c_M$ мы фиксируем матрицу

$$X = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_M \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

и сопоставляем сообщениям $W_1, \dots, W_{K_\alpha}$ вектор $\beta \in \{0,1\}^M$, такой что

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & i \in \{W_1, \dots, W_{K_\alpha}\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тогда $Y = X\beta$.

1.2 Предыдущие результаты

В [1] была получена первая оценка на данную величину, после чего в [2] получили новую оценку, но она верна лишь при фиксированном $\frac{K_\alpha}{N}$ и $N \to \infty$. Но главное её преимущество заключается в том, что первая оценка показывает себя значительно хуже второй при $N \to \infty$, поэтому возникает вопрос: можно ли улучшить первую оценку, чтобы она лучше себя вела в асимптотическом случае?

2 Методы доказательства

В доказательстве [1] используется неравенство Чернова, а в [2] добавляется неравенство Гордона (теорема A из [3]). Мы будем поступать аналогичным образом, в частности, мы применим те же методы, что и в [2], но вместо асимптотики будем смотреть на конкретные значения.

Список литературы

[1] Y. Polyanskiy, “A perspective on massive random-access,” *IEEE Information Theory (ISIT), 2017.*

[2] I. Zadik, Y. Polyanskiy, and C. Thrampoulidis, “Improved bounds on Gaussian MAC and sparse regression via Gaussian inequalities,” *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), 2019.*

[3] Gordon, Y. (1988). On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$. In: Lindenstrauss, J., Milman, V.D. (eds) Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol 1317. Springer, Berlin, Heidelberg.