Гибридный алгоритм решения задачи линейного программирования

студент Богданов Азат Газимович
руководитель Хильдебранд Роланд

Актуальность

В работе рассматривается решение задачи линейного программирования. Это очень старая задача, сформулированная в 1930-ых и получившая эффективное решение в 1940-ых. Ныне рассматривается в учебных курсах по оптимизации как стандартная задача, к которой можно свести широкий класс задач. Существует большое количество компьютерных программ (солверов), решающих данную задачу.

Существующие решения

Simplex-метод. Работает в среднем за O(n^3), хотя может вырождаться в экспоненциальное время, перебирая все возможные базисы(Пример Кли-Минти)

Методы внутренней точки. Работает в среднем за O(n^3.5). При этом обгоняет simplex-метод на задачах больших размерностей (n порядка 10^6), и разреженных.

Введение

В работе рассматривается задача линейного программирования(ЛП)

$$\min_{x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle : Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$$

Для нее двойственная задача имеет вид

$$\max_{s \geq 0,\ s \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n} \langle y, b \rangle : s + A^T y = c$$

Условие оптимальности можно записать так

$$\langle s, x \rangle = 0$$

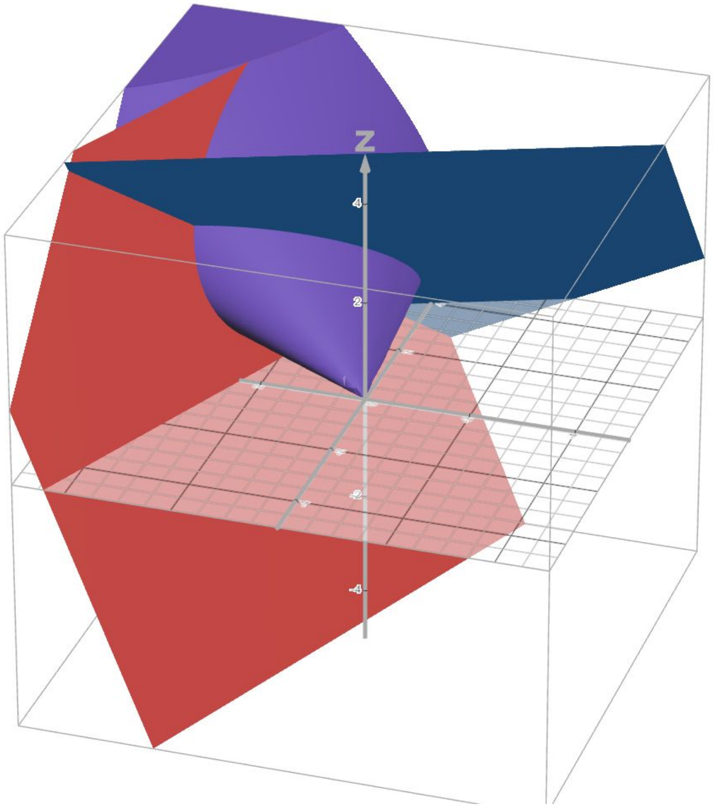
Постановка задачи

Имеется гибридный алгоритм решения задачи линейного программирования на, основанный на методе внутренней точки. Основная идея, рассмотреть

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\langle c, x\rangle + \mu\cdot F(x)\right) : \mu > 0,\ F(x) = -\sum_{i=1}^{n} log x_i$$

вспомогательную задачу. Где μ - параметр, F(x) - барьер, который неявно задает ограничение нахождения решения строго внутри ортанта. На основе барьера строим конус, который изнутри аппроксимирует положительный ортант, внутри которого задача решается аналитически.

Пример в R^3



Основная идея

Таким образом мы можем получить верхнюю оценку решения исходной задачи ЛП. Аналогично может получить нижнюю оценку рассмотрев двойственную задачу.

Также можно уточнить аппроксимационную задачу, использовав выпуклую оболочку конуса и прямой, проходящей через пересечение решения на конусе, продолженной до ближайшего ребра.

Основная идея

Из условия $x_i \cdot s_i = 0$ следует, что $x_i = 0$ либо $s_i = 0$.

Предположим, что $x_i = 0$. Тогда в аппроксимационной задаче появляется требование данное требование. И если решение данной задачи V будет выше оптимума V* V>V*, то предположение неверное, значит $s_i = 0$. Аналогично для двойственной задачи. Однако может случиться такое, что мы не отметем пару. Тогда перейдем к следующей. И так будем итерироваться после каждого прохода метода внутренней точки.

Итоги

1. Вычислено аналитическое решение аппроксимационных задач
2. Был реализован гибридный алгоритм
3. Действительно ускоряет метод внутренней точки и отсекает значительное количество переменных

Для матрицы 10x20 отсечено 55% плотность 80%

Для матрицы 10x20 отсечено 60% плотность 60%

Для матрицы 10x20 отсечено 55% плотность 40%

Для матрицы 15x30 отсечено 53% плотность 80%

Для матрицы 15x30 отсечено 56% плотность 60%

Для матрицы 15x30 отсечено 50% плотность 40%

Литература

собрана тут