Улучшение верхних оценок диагональных чисел Рамсея

Минеев Дмитрий Александрович

Научный руководитель:

Райгородский Андрей Михайлович (ФПМИ МФТИ)

20.05.2025

Определение чисел Рамсея

Опр. Пусть $r, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}_1$, $r \geq 2$. Многоцветным числом Рамсея $R_r(k_1, \ldots, k_r)$ называется минимальное такое $n \in \mathbb{N}_1$, что при любой раскраске рёбер K_n в цвета $1, \ldots, r$ в нём найдётся или клика цвета 1 размера k_1, … , или клика цвета r размера k_r.

Опр. Пусть $r, k \in \mathbb{N}_1$, $r \geq 2$. Диагональным многоцветным числом Рамсея называется $R_r(k) \coloneqq R_r(k, \ldots, k)$.

В чём проблема?

Вычислять точные значения чисел Рамсея – невероятно трудная задача. Вместо точных значений ищут оценки. Сегодня поговорим о верхних оценках.

Числа Рамсея										
n, m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	[40, 42]
4	1	4	9	18	25	[36, 41]	[49, 61]	[59, 84]	[73, 115]	[92, 149]
5	1	5	14	25	[43, 48]	[58, 87]	[80, 143]	[101, 216]	[133, 316]	[149, 442]
6	1	6	18	[36, 41]	[58, 87]	[102, 165]	[115, 298]	[134, 495]	[183, 780]	[204, 1171]
7	1	7	23	[49, 61]	[80, 143]	[115, 298]	[205, 540]	[217, 1031]	[252, 1713]	[292, 2826]
8	1	8	28	[56, 84]	[101, 216]	[127, 495]	[217, 1031]	[282, 1870]	[329, 3583]	[343, 6090]
9	1	9	36	[73, 115]	[133, 316]	[183, 780]	[252, 1713]	[329, 3583]	[565, 6588]	[580, 12677]
10	1	10	[40, 42]	[92, 149]	[149, 442]	[179, 1171]	[289, 2826]	[343, 6090]	[581, 12677]	[798, 23556]

История

В 1935 г. Эрдёш и Секереш [1] с помощью мат. индукции доказали асимптотическую (т.е. верную для достаточно больших k) верхнюю оценку

$$R_r(k) \leq r^{rk}.$$

Для частного случая $r = 2$ можно записать чуть более точную оценку

$$R_2(k) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi k}}.$$

История

Идеи Эрдёша и Секереша развивали, в том числе, Томассен, 1988 г. [2], Конлон, 2009 г., [3] и Сах (2023 г.), [4], что в итоге привело к получению следующей оценки для двухцветных чисел Рамсея:

$$R_2(k) \leq 4^{k - c\ln^2 k},$$

где $c > 0$ – некоторая константа.

На март 2023 г. это было самым лучшим известным результатом.

Прорывной результат

В марте 2023 г. вышла статья [5], в которой было получено первое за столетие экспоненциальное улучшение оценки. Так, было доказано, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$ верна оценка

$$R_2(k) \le (4-\varepsilon)^k.$$

Авторы работы не стремились оптимизировать значение ε. В их работе есть два доказательства, в одном из которых $\varepsilon = 2^{-7}$, а в другом 2^{-10}.

Оптимизация ε

В работе [6], вышедшей в июле 2024 г., доказательство из работы [5] было упрощено и оптимизировано. Как итог был получен следующий лучший на данный момент результат для двухцветных чисел:

$$R_2(k) \leq 3.8^{k+o(k)}.$$

Адаптация для многоцветного случая

Наконец, в октябре 2024 г. вышла последняя на данный момент крупная работа [7] по теме. В ней была доказана следующая теорема. Для любого фиксированного $r \in \mathbb{N}_1, r \geq 2$ существует $\delta = \delta(r) > 0$ такое, что

$$R_r(k) \leq e^{-\delta k} r^{rk}$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$.

Каков был план на семестр?

Главной задачей моей работы в семестре было изучение и валидация работ [6] и [7]. Необходимо было понять новый метод, который использовали математики, чтобы улучшить непробивавшуюся век оценку.

Дополнительной задачей была попытка понять, какой потенциал есть у этого метода и что можно дальше пытаться улучшать.

В чём основная идея?

Все доказательства в упомянутых выше статьях в той или иной степени алгоритмичны. То есть искомая клика или явно строится с помощью алгоритма, как в работах [5] и [7], или её существование доказывается с помощью мат. индукции, как в работе [6].

Нужно следить за плотностью!

В процессе алгоритма ключевым является вопрос о том, с какой скоростью падает «плотность» рёбер определенного цвета между определенными множествами.

Опр. Пусть $n, r \in \mathbb{N}_1, r \geq 2$ и нам дан K_n, рёбра которого покрашены в цвета $1, \ldots, r$. Пусть X, Y – два непустых непересекающихся множества вершин, $c \in 1, \ldots, r$. Плотностью рёбер цвета c между X и Y называется величина

$$\frac{e_c(X,Y)}{|X||Y|},$$

где $e_c(X,Y)$ - количество рёбер цвета c между X и Y.

В чём трудности?

Теоретико-графовых рассуждений в статьях крайне мало. Основной объём занимает большое количество технических выкладок. Причём расписаны они очень кратко, и часто приходится долго самостоятельно выводить тождества и неравенства.

Какой есть потенциал?

1) Многие оценки сделаны довольно грубо. Если сделать еще больше технических выкладок, то, я уверен, оценки можно улучшить.
2) У алгоритмов есть стартовые параметры. Меняя их, возможно, получится придумать более оптимальные оценки.
3) Сама идея нова, и её вариации и адаптации, надо полагать, в скором времени увидят свет.

Итоги работы

Работы [6] и [7] были мною изучены и провалидированы. Работа [5] была изучена частично. В результате этого удалось понять, какие общие идеи стоят за всеми прорывными результатами последних лет, а также понять, какие трудности возникают при получении оценок.

Как-то самостоятельно улучшить оценки не удалось. Не хватило ни времени, ни технического навыка.

Ссылки на литературу

1. P. Erdos and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compos. Math., 2 (1935), 463-470.
2. A. Thomason, An upper bound for some Ramsey numbers, J. Graph Theory, 12 (1988), 509-517.
3. D. Conlon, A new upper bound for diagonal Ramsey numbers, Ann. Math., 170 (2009), 941-960.
4. A. Sah, Diagonal Ramsey via effective quasirandomness, Duke Math. J., 172 (2023), 545-567.
5. M. Campos, S. Griffiths, R. Morris, and J. Sahasrabudhe, An exponential improvement for diagonal Ramsey, arxiv.org/abs/2303.09521 (2023).
6. P. Gupta, N. Ndiaye, S. Norin and L. Wei, Optimizing the CGMS upper bound on Ramsey numbers, arxiv.org/abs/2407.19026 (2024).
7. P. Balister, B. Bollobas, M. Campos, S. Griffiths, E. Hurley, R. Morris, J. Sahasrabudhe and M. Tiba, Upper bounds for multicolour Ramsey numbers, arxiv.org/abs/2410.17197 (2024).

Спасибо за внимание!