The Weak Simplex Conjecture Comprehension

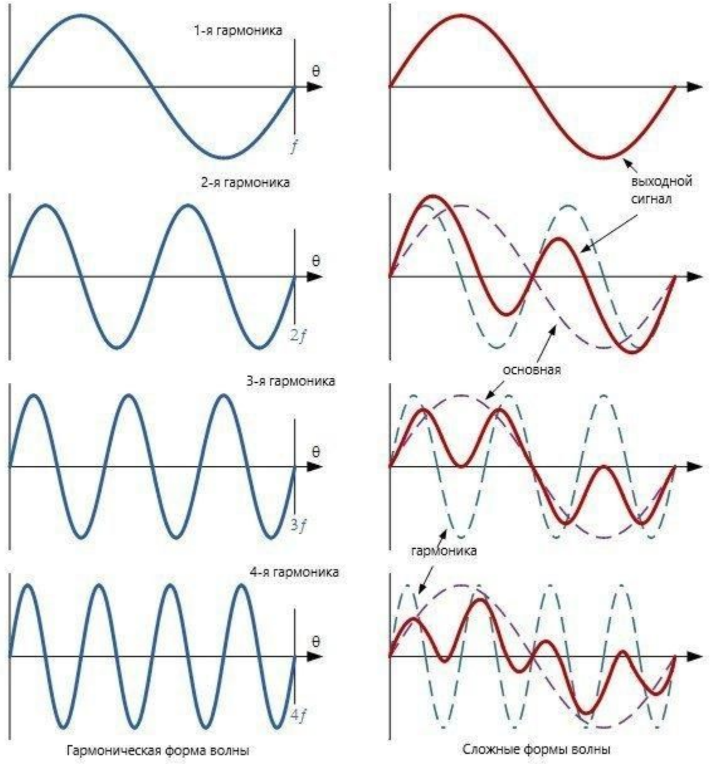
Докладчик:
Савватеев Михаил,
студент ФПМИ

Научный руководитель:
Алексей Фролов,
профессор Сколтех и МФТИ

Введение и мотивация

- Хочется передавать информацию на расстоянии
- Передача – посылка сигнала
- Сигнал – вектор из ограниченного мн-ва в $\mathbf{R}^n$

1. Фиксируется набор сообщений
2. Каждому сопоставляется вектор
3. После передачи полученное декодируется обратно



Постановка задачи

При передаче добавляется шум $z \sim \mathcal{N}(0, \sigma \cdot I_n)$

Отправлен x ⏩ получен $y = x + z$

Всего n+1 сообщение, вектора на $\mathbb{S}^{n-1}$

Гипотеза: оптимально брать вершины n-мерного симплекса

Исследования по теме

- On the signal selection problem 1968

  Случай аффинно зависимых векторов

- The Strong Simplex Conjecture is False 1994

  Ограничение на среднюю норму
  Опровержение при $n \geqslant 7$

- A Proof of the Weak Simplex Conjecture 2023

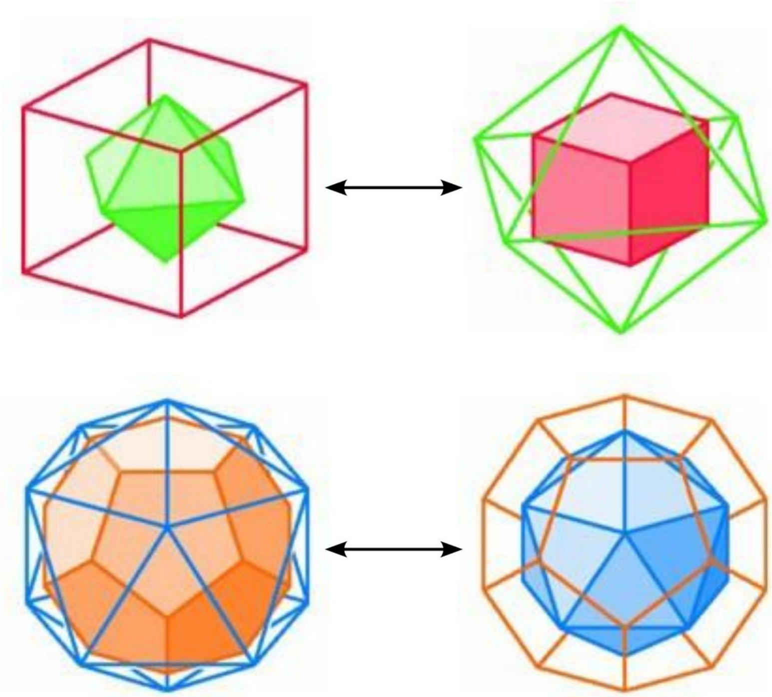
  Док-во для векторов единичной нормы

Как расшифровывать?

Декодировщик $\leftrightarrow$
семейство из n+1 мн-ва в $\mathbf{R}^n$

Pr успешной интерпретации
сообщения – Q(W, D)

Оптимальные мн-ва D $\rightarrow$
ячейки диаграммы Вороного

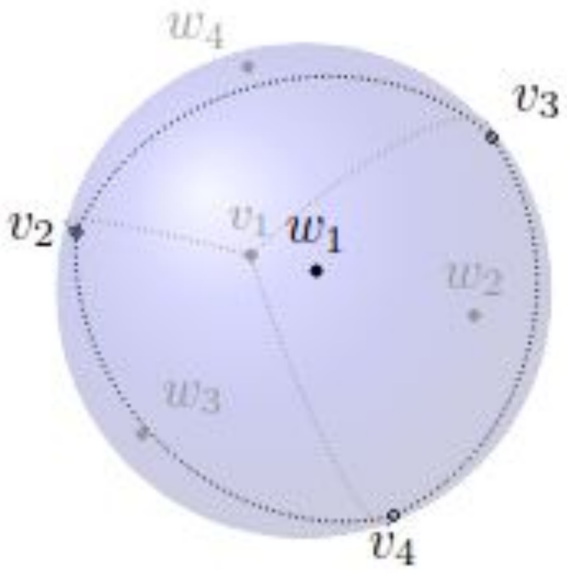


Переформулировка задачи

W аффинно независимо $\Longrightarrow$
ячейки D задаются мн-вом V

V содержит n+1 вектор,
само аффинно независимо

Нужно max Q(W,V) $\longrightarrow$
Pr успешного декодирования



Существование ответа

Обозначим сужение $Q(W,D)$ на $D \longrightarrow$
ячейки диаграммы Вороного, как просто $Q(W)$

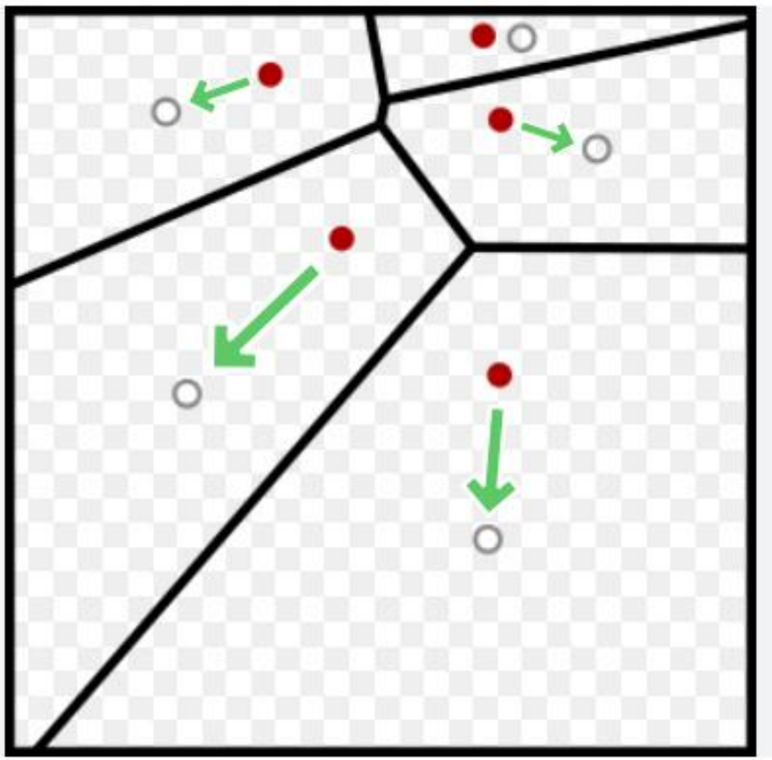
$\sup Q(W,D) = \sup Q(W)$ из их оптимальности

Функция $Q(W)$ непрерывна, а вектора W
берутся на сфере $\Longrightarrow$ есть наилучшие

По Фарберу $\exists$ оптимальные с аффинно независимыми W (и V)

Как зашифровывать?

Коды W $\leftrightarrow$ представители,
куда декодируются области D



Для фиксированных V (и D)
найдём оптимальное W

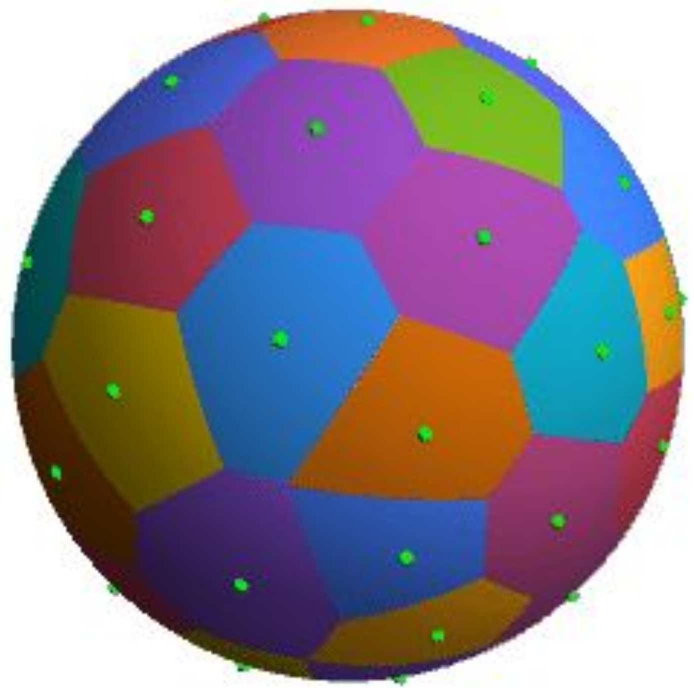
Такое расположение $\exists\,!$, обозначим
его T(***V***) для ячейки ***V*** = $\{v_1, \ldots, v_n\}$

Свойства T(***V***)

Функция T(***V***) сферически инвариантна

$T(v_i) \to \mathbb{S}^{n-1}$ инъективно
при фиксированном $V \setminus v_i$

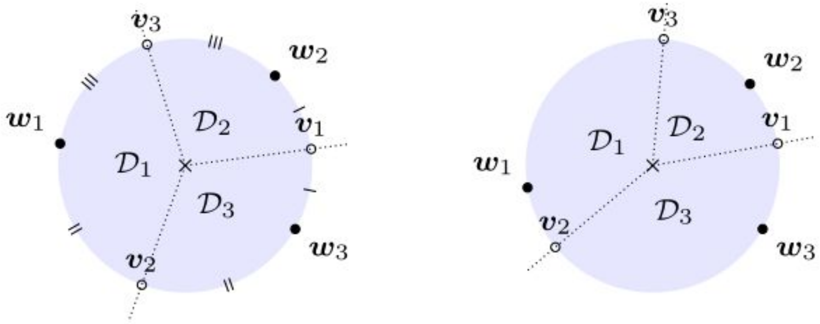
По имеющейся n-1 вершине ячейки
и T(***V***) восстанавливаем оставшуюся



Оптимальное расположение

Вершины w_i и w_j симметричны относительно гиперграни $V \setminus \{i, j\}$

По w_i, w_j и $V \setminus \{i, j\}$ однозначно восстанавливаются v_i и v_j



(a) Optimal decision regions (b) Relaxation

Получившиеся ячейки $V \setminus i$ и $V \setminus j$ также симметричны

Отсюда V образует правильный симплекс $\Longrightarrow$ W тоже

Обзор работы

1. Осознание идей и макета док-ва
2. Чёткое его структурирование
3. Аккуратное обоснование фактов, которые авторы считают известными/техническими
4. Обоснование неявно используемых фактов (таких как $\exists$ оптимального ответа)
5. Выделение нужных в док-ве ограничений. По возможности, их ослабление

Результаты

Получилось:

1. Понять и упорядочить док-во.
2. Формально ввести, что такое алгоритм декодировки, связать с семейством мн-в в $\mathbf{R}^n$
3. Ослабить требования на мн-ва, разрешить декодировщику быть вероятностным
4. Формально проверить возникновение V и его связь с ячейками диаграммы Вороного
5. Подшлифовать часть с многомерной геометрией; подсветить, что единственный кандидат симплекс $\longrightarrow$ действительно ответ.

Не вышло:

1. Проверифицировать док-во неоптимальности аффинно зависимых W из статьи Фарбера
2. Формально вывести свойства функции T($\boldsymbol{V}$)
3. Обобщить док-во на “Middle Conjecture” векторов не более чем единичной нормы