Кривые Фаддеева и их треугольники Ньютона

Докладчик: Никита Андрусов
Научный руководитель: Виктор Батырев

Мини-конференция научного клуба ФПМИ

17-18 мая 2025 г.

Кривая Ферма и её факторы

$T^2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ — алгебраический тор.
Кривая Ферма

$$Fermat_p : x^p + y^p = 1,\ (x, y) \in T^2,\ p \text{ — простое}$$

$G = \langle \tau_x, \tau_y \rangle \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ действует на $Fermat_p$:
$\tau_x : x \mapsto \xi_p x,\ y \mapsto y,\ \tau_y : x \mapsto x,\ y \mapsto \xi_p y$, где $\xi_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$
$H \subset G, H = \langle (a, b) \rangle$, где $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$. Тогда
$F = Fermat_p / H$ — кривая Фаддеева.
Кривые Фаддеева также можно задавать уравнениями вида [Фад61]:

$$y^p = \pm x^k (x \pm 1),\ 1 \leqslant k < p - 1$$

Многоугольник Ньютона

$$C : \sum_{a_{k,l} \neq 0} a_{k,l} x^k y^l = 0 \mapsto Conv\left(\{(k,l) \mid a_{k,l} \neq 0\}\right) = P_C$$

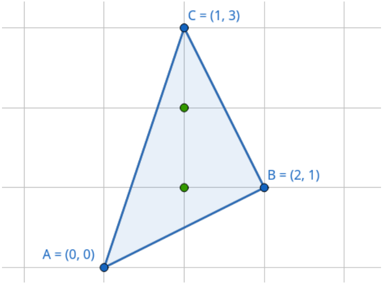

Рис.: Треугольник Ньютона для кривой $C : x^2 y + x y^3 = 1$

Замечание

$$Aut(T^2) \ni \left(x \mapsto x^a y^b, y \mapsto x^c y^d\right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$$

Треугольник Ньютона

Для кривой Фаддеева многоугольник Ньютона — это простой треугольник площади $\frac{p}{2}$: на рёбрах нет целых точек, кроме вершин.

$$F : y^p = \pm x^k(x \pm 1) \mapsto Conv((0, p),\ (k, 0),\ (k + 1, 0))$$

Из формулы Пика это треугольник с $\frac{p-1}{2}$ целых точек внутри.

Треугольник Ньютона

Предложение

Число классов эквивалентности простых треугольников с площадью $\frac{p}{2}$ равно:

$$\begin{cases} 0, & \text{если } p = 2 \\ 1, & \text{если } p = 3 \\ \frac{p+5}{6}, & \text{если } p \equiv 1 \mod 6 \\ \frac{p+1}{6}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Триангуляция

$A \subset SL_3(\mathbb{C})$ — конечная абелева подгруппа.
$A = \langle diag(\xi_p^{a_1}, \xi_p^{a_2}, \xi_p^{a_3}) \rangle$, $a_1 + a_2 + a_3 = p$
$\mathbb{C}^3/A$ — особое торическое многообразие. Крепантное разрешение его особенностей связано с выпуклой триангуляцией определённого простого треугольника Δ_A на целочисленные треугольники площади $\frac{1}{2}$.

Как получать такие триангуляции Δ_A?

Способ 1. Из схемы Гильберта (описан в работе [Cra05]).

Способ 2. Другая конструкция, требующая меньше углубления в абстракцию.

Триангуляция

ΔPQR — простой треугольник, X — точка в ΔPQR

$h(X) := S^2_{\Delta PQX} + S^2_{\Delta QRX} + S^2_{\Delta RPX}$

$S = Conv\left(\{(X,t) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} | X \in \Delta PQR, t \geqslant h(X)\}\right) \subset \mathbb{R}^3$

Предложение

Проекция всех конечных граней S на плоскость $z = 0$ задаёт триангуляцию ΔPQR целочисленными треугольниками площади $\frac{1}{2}$.

Программа, рисующая эти триангуляции: [And25]

Триангуляция

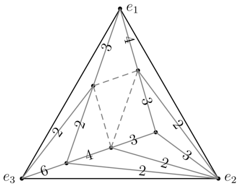

Рис.: Триангуляция из примера 2.2 работы [Cra05]

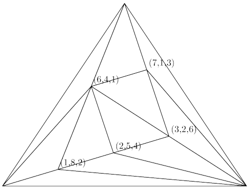

Рис.: Триангуляция, полученная методом, описанным выше. Возле вершин подписаны целочисленные расстояния до сторон

Кривые Гурвица

Теорема (Гурвиц)

Для кривой C рода g $|Aut(C)| \leqslant 84(g-1)$. Кривая, для которой $|Aut(C)| = 84(g-1)$ называется кривой Гурвица.

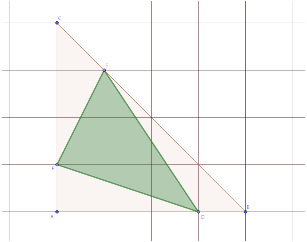

Рис.: Треугольник Ньютона квартики Клейна: $x^3 + xy^3 + y = 0$

Предложение

Квартика Клейна — единственная кривая Фаддеева, являющаяся кривой Гурвица.

Подгруппа автоморфизмов

$$X: y^p + x^k(x+1) = 0,\ \ p \equiv 1\, mod\, 6, k^3 \equiv -1\, mod\, p, k \neq -1\, mod\, p$$

$\exists \psi \in Aut(T^2), \psi$ переставляет по циклу вершины P_X $(\psi^3 = id)$

$\exists \varphi \in Aut(T^2) : x \mapsto x, y \mapsto \xi_p y,\ \ \varphi^p = id$

$\varphi(X) = X, \psi(X) = X \Rightarrow \varphi|_X, \psi|_X \in Aut(X)$

Вопрос: как устроена группа $G = \langle \varphi, \psi \rangle \subset Aut(T^2)$ и группа $G|_X = \langle \varphi|_X, \psi|_X \rangle \subset Aut(X)$?

Предложение

$$G|_X \cong G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Группа автоморфизмов

Как устроена вся группа автоморфизмов кривой Фаддеева X? Пока непонятно, намечены ещё два подхода:

- Изучить, какие детские рисунки соответствуют кривым Фаддеева. Для этого разбираюсь с теорией детских рисунков по книге [Зво10];
- Изучить, как $Aut(X)$ группа действует на $Jac(X)$ — якобиане кривой. Для этого надо понять, как устроен якобиан. Для квартики Кляйна это уже сделали в работе [MM23] — можно действовать по аналогии.

Итоги

- Простое доказательство к известному факту: классификации простых треугольников площади $\frac{p}{2}$;
- Новая конструкция триангуляции простого треугольника на целочисленные площади $\frac{1}{2}$, связанная с разрешением особенностей многообразия $\mathbb{C}^3/A$;
- Программа для визуализации триангуляций, полученных с помощью новой конструкции;
- Утверждение, что картика Клейна — единственная кривая Фаддеева, являющаяся кривой Гурвица;
- Описание подгруппы автоморфизмов специального вида кривой Фаддеева: $G|_X = \langle \varphi|_X, \psi|_X \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
- Подходы к изучению всей группы автоморфизмов кривой Фаддеева (пока не реализованы) через теорию детских рисунков и через изучение действия этой группы на якобиане кривой.

Источники

[Фад61] Д. К. Фаддеев. “О группе классов дивизоров на некоторых алгебраических кривых”. В: *Докл. АН СССР* (2 1961), с. 296—298. URL: http://mi.mathnet.ru/dan24501.

[Cra05] Alastair Craw. “An explicit construction of the McKay correspondence for A-Hilb C3”. В: *Journal of Algebra* 285.2 (2005), с. 682—705. ISSN: 0021-8693. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.10.001. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869304005228.

[Зво10] Ландо С.К. Звонкин А.К. *Графы на поверхностях и их приложения*. МЦНМО, 2010.

[MM23] Dimitri Markushevich и Anne Moreau. “Action of the Automorphism Group on the Jacobian of Klein’s Quartic Curve”. В: *Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations*. Под ред. Ivan Cheltsov и др. Cham: Springer International Publishing, 2023, с. 591—607. ISBN: 978-3-031-17859-7.

[And25] Nikita Andrusov. *Faddeev curves Newton triangle triangulation image generator*. Вер. 1.0. Апр. 2025. URL: https://github.com/AndrusovN/faddeev_triangulation.