

# Кривые Фаддеева: треугольники Ньютона и группы автоморфизмов

**Н. А. Андрусов**

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Пусть  $p \geq 3$  — простое число. Кривая Ферма  $x^p + y^p = z^p$  является накрытием Галуа прямой  $\mathbb{P}^1$  с ветвлением в трёх точках. Её группа Галуа изоморфна  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ . Подгруппы  $H \subset (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$  порядка  $p$  определяют кривые  $F_H$  рода  $\frac{p-1}{2}$ , которые впервые рассматривались Дмитрием Константиновичем Фаддеевым [Фад61]. Они описывались уравнениями вида  $y^p = x^k(x-1)$  ( $k \neq 0, p-1$ ).

Многоугольник Ньютона кривой Фаддеева — это треугольник площади  $\frac{p}{2}$ , целые точки границы которого — только его вершины. Такие треугольники мы будем называть простыми. Несложно получить классификацию всех простых треугольников:

**Предложение 1.** *С точностью до аффинных автоморфизмов решётки существует ровно*

$$\begin{cases} 1, & \text{если } p = 3 \\ \frac{p+5}{6}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod{6} \\ \frac{p+1}{6}, & \text{иначе} \end{cases}$$

*простых треугольников  $\Delta$ , которые взаимно однозначно соответствуют трёхмерным особым торическим многообразиям  $\mathbb{C}^3/\Gamma$ , где  $\Gamma \subset SL(3, \mathbb{C})$  — некоторая циклическая подгруппа порядка  $p$ .*

Минимальные разрешения особенностей многообразий  $\mathbb{C}^3/\Gamma$  описываются выпуклыми триангуляциями  $\Delta$  на  $p$  целочисленных треугольников. Одна из таких триангуляций возникает из  $\Gamma$ -схемы Гильберта (см. например [Cra05]). В данной работе предлагается новый метод построения выпуклых триангуляций. Показывается, что этот метод даёт отличные триангуляции от тех, что предложены в работе [Cra05]. Чтобы обнаружить этот факт, использовалась программа [And25] для генерации и визуализации триангуляций.

Интересной проблемой является описание групп автоморфизмов кривых Фаддеева. Частный случай кривой Фаддеева — кватрика Клейна, группа автоморфизмов которой — простая группа  $PSL(2, \mathbb{F}_7)$  порядка 168 [Lev99]. Согласно теореме Гурвица это максимальный порядок группы автоморфизмов для кривой рода 3.

**Определение 1** (Кривые Гурвица). *Кривая рода  $g$  с группой автоморфизмов порядка  $84(g-1)$  называется кривой Гурвица.*

**Предложение 2.** *Квартика Клейна — единственная кривая Фаддеева, являющаяся кривой Гурвица.*

Из теории Галуа следует, что у любой кривой Фаддеева есть автоморфизм  $\psi$  порядка  $p$ . При  $p \equiv 1 \pmod{6}$  есть специального вида кривые Фаддеева, у которых есть автоморфизм  $\varphi$  порядка 3, возникающий из аффинного автоморфизма соответствующего треугольника Ньютона.

**Предложение 3.** *Пусть  $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ . Тогда  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*

Полное описание группы автоморфизмов кривой Фаддеева является открытым вопросом. В качестве направлений дальнейшей работы предполагается изучение действия группы автоморфизмов на якобиане кривой, как это сделано для кватрики Клейна в работе [ММ23]. Другой подход — изучение автоморфизмов детских рисунков, соответствующих кривым Фаддеева. Он рассмотрен для кривой Ферма, например, в книге [Зво10].

Работа выполнена под руководством В.В. Батырева. Автор выражает благодарность Г.Б. Шабату за обсуждение теории детских рисунков.

## Список литературы

- [Фад61] Д. К. Фаддеев. “О группе классов дивизоров на некоторых алгебраических кривых”. В: *Докл. АН СССР* (2 1961), с. 296—298. URL: <http://mi.mathnet.ru/dan24501>.
- [Lev99] S. Levy. *The Eightfold Way: The Beauty of Klein’s Quartic Curve*. MSRI Publications, Cambridge University Press, Cambridge., 1999.
- [Cra05] Alastair Craw. “An explicit construction of the McKay correspondence for A-Hilb C3”. В: *Journal of Algebra* 285.2 (2005), с. 682—705. ISSN: 0021-8693. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.10.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869304005228>.
- [Зво10] Ландо С.К. Звонкин А.К. *Графы на поверхностях и их приложения*. МЦНМО, 2010.
- [ММ23] Dimitri Markushevich и Anne Moreau. “Action of the Automorphism Group on the Jacobian of Klein’s Quartic Curve”. В: *Birational Geometry, Kähler–Einstein Metrics and Degenerations*. Под ред. Ivan Cheltsov и др. Cham: Springer International Publishing, 2023, с. 591—607. ISBN: 978-3-031-17859-7.
- [And25] Nikita Andrusov. *Faddeev curves Newton triangle triangulation image generator*. Вер. 1.0. Апр. 2025. URL: [https://github.com/AndrusovN/faddeev\\_triangulation](https://github.com/AndrusovN/faddeev_triangulation).