# Грубые концы метрических пространств

Старков Михаил

Научный руководитель: А. А. Арутюнов, ИПУ РАН

МФТИ

18 мая 2025 г.

# Мотивация

Грубая геометрия позволяет изучать глобальные свойства пространств, пренебрегая локальными [3, 5, 6]. В частности

- Грубая геометрия тесно связана с вложимостью пространств в гильбертовы, а также с вопросами алгебраической топологии [8]
- Концы пространств описывают границы компактификаций [3]

# Постановка задачи и актуальность

## Теорема (Хопф) [4]

Число концов графа Кэли $\mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X})$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

## Постановка задачи

Верно ли, что число концов диаграммы сопряженности $\mathrm{sk}_u(G, \mathscr{X})$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$?

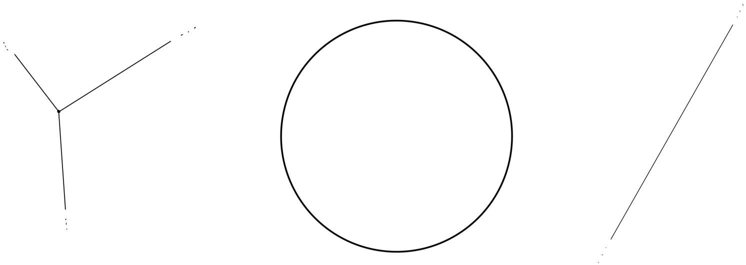
## Актуальность

- Диаграммы сопряженности аналогичны графам Кэли (и накрываются ими)
- Вычисление числа концов диаграммы сопряженности равносильно вычислениию размерности факторпространства квазивнутренних дифференцирваний по внутренним для дифференцирований с носителем в данном субгруппоиде.[2, 1]

# Методы исследования

- Стандартные методы грубой геометрии
- Стандартные методы комбинаторной теории групп
- Поднятие путей в метрических пространствах

# Концы пространств (интуитивно)



У тройки лучей три конца; у окружности концов нет; у прямой два конца.

# Общие определения

## Определение

Отображение метрических пространств $\varphi\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется *грубым*, если

- для каждого ограниченного $U \subset Y$, прообраз $\varphi^{-1}(U)$ ограничен (собственность)
- $\forall \delta > 0\ \exists S_\delta\ \forall x, x' \in X :\ \rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) < S_\delta$ (борнологичность)

## Определение

Метрическое пространство $X$ называется *собственным*, если в нем любое ограниченное подмножество является предкомпактом.

# Концы пространств

## Определение

Метрическое пространство $(X, \rho)$ называется $M$-связным, если для любых точек $A, B \in X$ существует набор точек $\{A_i\}_{i=0}^N \subset X$, такой что $A_0 = A,\ A_N = B,\ \rho(A_i, A_{i-1}) \leqslant M\ \forall i \in \overline{1, n}$.

Обозначим через $\mathscr{U}_Q^{X,\mu}$ множество неограниченных компонент $\mu$-связности в $X \setminus Q$.

Пусть $X$ - собственное[1] метрическое пространство и существует последовательность ограниченных множеств, исчерпывающая $X$, т.е. такая $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$, что

1. $\forall i : Q_i \subset Q_{i+1}$;
2. $\cup_{i=1}^\infty Q_i = X$.

Число $\mu$-концов пространства $X$ определяется как

$$e_\mu(X) := \max_{i \in \mathbb{N}} |\mathscr{U}_{Q_i}^{X,\mu}|$$

[1] свойство собственности требуем, чтобы определение не зависело от выбора последовательности $\{Q_i\}$

# Концы графов и групп

## Определение

Пусть $X$ - граф, $v$ и $u$ – два несамопересекающихся луча. Лучи $u, v$ *эквивалентны*, если существует несамопересекающийся луч $h$, пересекающий каждый из лучей $v, u$ бесконечно много раз. *Концом* в графе $X$ называестя класс эквивалентности лучей.

Пусть группа $G$ задана набором образующих $\mathscr{X}$

## Определение

Определим граф $Cayley(G, \mathscr{X})$ следующим образом. Вершинами графа являются элементы группы — $V(\mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X})) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathscr{X}$, если $ax = b$

Определим граф $sk(G, \mathscr{X})$ следующим образом. Вершинами графа являются элементы группы — $V(\mathrm{sk}(G, \mathscr{X})) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathscr{X}$, если $x^{-1}ax = b$

Обозначим компоненту связности элемента $u \in G$ через $sk_u(G, \mathscr{X})$.

# Концы графов и групп

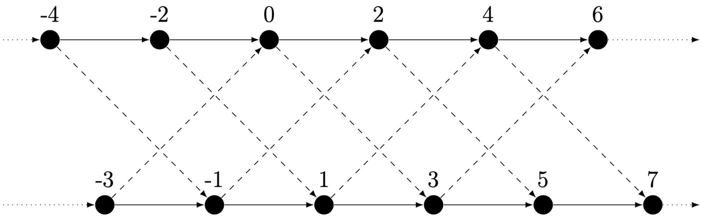



Рис. 1: Граф Кэли группы $\mathbb{Z}$ с образующими $2, 3$.

# Концы графов и групп

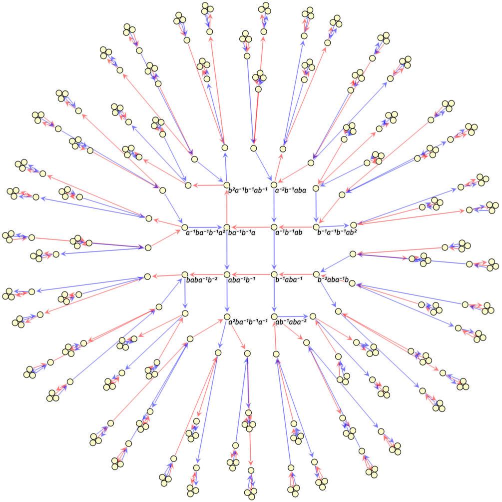



Рис. 2: Фрагмент диаграммы сопряжённости $\mathrm{sk}_{aba^{-1}b^{-1}}$ для группы $F_2$

# Результаты

## Теорема 1

Пусть $X, Y$ — собственные метрические пространства, $X$ $\mu$-связно, $\varphi\colon X \to Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X: \ \rho_X(x, x') \leqslant \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leqslant \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geqslant e_\nu(Y)$.

## Теорема 2

Пусть для графов $X, Y$ отображение $f\colon V(X) \to V(Y)$ сюръективно и обладает свойством поднятия путей. Тогда $e(X) \geqslant e(Y)$.

С помощью последней теоремы доказано, что число концов диаграммы сопряженности принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$, если число концов графа Кэли конечно.

## Теорема 1

Пусть $X, Y$ — собственные метрические пространства, $X$ $\mu$-связно, $\varphi\colon X \to Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X : \; \rho_X(x, x') \leqslant \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leqslant \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geqslant e_\nu(Y)$.

$$\Uparrow$$

## Предложение

Пусть $X$ — собственное $\mu$-связное метрическое пространство, $Q \subset X$ ограничено. Тогда объединение всех ограниченных компонент $\mu$-связности в $X \setminus Q$ ограничено.

## План доказательства

Рассматриваем в пространстве $X$ решетку и переводим задачу на язык теории графов

Пусть $X, Y$ – графы, $f\colon V(X) \to V(Y)$ – отображение множеств вершин графов.

## Определение

Мы говорим, что $f$ обладает свойством поднятия путей, если для любого пути $v = v_1 v_2 \ldots$ в $Y$ и вершины $u_1 \in f^{-1}(v_1)$ существует путь $u = u_1 u_2 \ldots$ в $X$, такой что $f(u_i) = v_i \ \forall i$. Тогда путь $u$ называется поднятием пути $v$ из вершины $u_1$.

## Теорема 2

Пусть отображение $f\colon V(X) \to V(Y)$ сюръективно и обладает свойством поднятия путей. Тогда $e(X) \geqslant e(Y)$.

## План доказательства

Используем эквивалентное определение конца графа через классы эквивалентности лучей и показываем, что

- конец «переходит» в конец;
- у каждого конца в $Y$ есть «прообраз».

# Вывод основного результата

Определим $\zeta : \mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X}) \to \mathrm{sk}_u(G, \mathscr{X})$ следующим образом.
• вершина $g$ переходит в $g^{-1}ug$;
• ребро, помеченное элементом $x \in \mathscr{X}$, переходит в ребро между вершинами, помеченное тем же элементом $x$.
$\Rightarrow$ Отображение $\zeta$ сюръективно и обладает свойством поднятия путей.
Таким образом, $e(\mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X})) \geqslant e(\mathrm{sk}_u(G, \mathscr{X}))$

# Планы

Для полного доказательства аналога теоремы Хопфа для диаграмм сопряженности остается разобрать случай $e(\text{Cayley}) = \infty$

## Теорема (Столлингс) [7]

$e(\text{Cayley}(G, \mathscr{X})) = \infty \Leftrightarrow G$ представима как
i. свободное произведение с конечными объединенными подгруппами;
ii. HNN расширение с конечными связанными подгруппами.

Для доказательства утверждения «$e(\text{Cayley}) = \infty \Rightarrow e(\text{sk}_u) \in \{0, 1, 2, \infty\}$» предлагается использовать нормальную форму в HNN-расширении и амальгамированном произведении соответственно

## Нормальная форма в HNN-расширении

Пусть $G^*$ – расширение группы $G$ связывающее подгруппы $A, B$. Пусть $T_A, T_B$ – трансверсали. Тогда для любого $g \in G^*$ найдется последовательность вида $g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 \dots t^{\varepsilon_n} g_n$, где $\varepsilon = \pm 1$ и i) если $\varepsilon_i = -1$, то $g_i \in T_A$, ii) если $\varepsilon_i = +1$, то $g_i \in T_B$, iii) нет вхождений вида $t^{\varepsilon} 1 t^{-\varepsilon}$.

# Заключение

**Теорема**

Если число концов графа Кэли $\mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X})$ конечно, то число концов диаграммы сопряженности $\mathrm{sk}_u(G, \mathscr{X})$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$

Таким образом, исходная гипотеза практически доказана, и есть основания полагать, что она верна.
Доказательство гипотезы будет означать, что мы можем дополнить классификацию факторпространств квазивнутренних дифференцирований по внутренним.

# Литература


[1] A. Arutyunov. Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups. *European Journal of Mathematics*, 9, 2023.

[2] A. Arutyunov. *О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах*. PhD thesis, 12 2023.

[3] A. Arutyunov. Грубая геометрия. НМУ, 2024.

[4] H. Hopf. Enden offener räume und unendliche diskontinuierliche gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 16:81–100, 1943.

[5] J. López and A. Candel. *Generic Coarse Geometry of Leaves*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2018.

[6] J. Roe. Lectures on coarse geometry. 2003.

[7] J. P. Stallings. Group theory and three-dimensional manifolds. 1971.

[8] G. Yu. The coarse baum–connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into hilbert space. *Inventiones mathematicae*, 139, 2000.

Спасибо за внимание!

# Доказательство теоремы 1

Рассмотрим последовательность $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченных множеств, исчерпывающую $Y$. Тогда $\{\varphi^{-1}(Q_i)\}$ исчерпывает $X$.
Идея: для каждого натурального $n$ построить сюръективное отображение

$$\eta\colon \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)} \to \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$.
Для $W \in \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)}$ множество $\varphi(W) \subset Y \setminus Q_n$ неограничено и $\nu$-связно. Значит $\varphi(W)$ целиком содержится в некотором $V \in \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}$.

Для $W \in \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)}$ положим $\eta(W) := V \in \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}$, если $\varphi(W) \subset V$.
Остается доказать сюръективность $\eta$.

# Доказательство сюръективности $\eta$

**Предложение**

Пусть $X$ — собственное $\mu$-связное метрическое пространство, $Q \subset X$ ограничено. Тогда объединение всех ограниченных компонент $\mu$-связности в $X \setminus Q$ ограничено.

Зафиксируем произвольное $V \in \mathscr{U}_{Q_n}^{Y,\nu}$. Т.к. $\varphi^{-1}(V)$ неограничено, а объединение всех ограниченных компонент $\mu$-связности в $X \setminus \varphi^{-1}(Q_n)$ ограничено по предложению, то существует неограниченная компонента $\mu$-связности $W \in \mathscr{U}_{\varphi^{-1}(Q_n)}^{X,\mu}$, образ которой пересекает $V$, а значит и целиком содержится в $V$.
Таким образом, построенное ранее отображение $\eta\colon \mathscr{U}_{\varphi^{-1}(Q_n)}^{X,\mu} \to \mathscr{U}_{Q_n}^{Y,\nu}$ сюръективно.
Поскольку $n \in \mathbb{N}$ произвольное, то $e_\mu(X) \geqslant e_\nu(Y)$.

$\square$

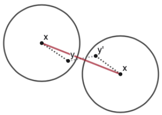
# Доказательство предложения

*Доказательство.* Рассмотрим в $X$ решетку $\Lambda$, т.е множество точек, т.ч.

1. $\forall x, x' \in \Lambda : \ (\rho(x, x') \geqslant \mu)$
2. $\forall x \in X \ \exists y \in \Lambda : \ (\rho(x, y) < \mu)$

Рассмотрим теперь граф $\Gamma$ с $V = \Lambda$. Множество ребер определим так:

$$xx' \in E \Leftrightarrow \exists y \in B_\mu(x), \ y' \in B_\mu(x') : \ (\rho(y, y') \leqslant \mu)$$



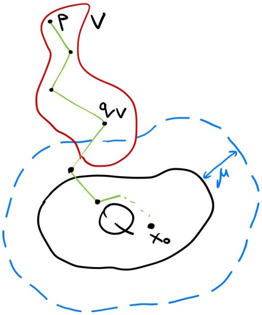

Для $S \subset X$ и $r > 0$ обозначим $U_r(S) := \{x \in X : \rho(x, S) < r\}$

Обозначим через $\mathscr{A}$ множество компонент $\mu$-связности в $X \setminus Q$, не лежащих целиком в $U_{2\mu}(Q)$. Достаточно доказать, что $\mathscr{A}$ конечно.

# Доказательство предложения

Зафиксируем точку $x_0 \in \Lambda \cap U_\mu(Q)$.

Зафиксируем $V \in \mathscr{A}$. Так как $V \not\subset U_{2\mu}(Q)$, то существует $p \in \Lambda \cap V \setminus U_\mu(Q)$. Поскольку $X$ $\mu$-связно, то граф $\Gamma$ связен. Тогда существует путь в $\Gamma$ из $p$ в $x_0$. Выберем на этом пути вершину $q_V$ — первую вершину с тем свойством, что следующая вершина пути лежит в $U_\mu(Q)$. Положим $\theta(V) := q_V$.



# Доказательство предложения

Построенное таким образом отображение $\theta\colon \mathscr{A} \to \Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ инъективно. Действительно, если $\theta(V) = \theta(W) = q_V$, то найдутся точки $p \in V, p' \in W$, связанные путем в $X \setminus Q$, проходящим через $q_V$. Значит $|\mathscr{A}| \leqslant |\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)|$.

Множество $\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ замкнуто и ограничено, значит является компактом. Если $\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ бесконечно, то $\{B_\mu(x)\}_{x \in \Lambda \cap U_{4\mu}(Q)}$ образует открытое покрытие, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Значит $|\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)| < +\infty$.