Онлайн оптимизация на симплексе: применение к задаче о максимальном одновременном потоке и её модификации

Н.С. Артюх, А.В. Рогозин
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный
12 мая 2025 г.

УДК 519.85, 519.67

Введение

Задача о максимальном одновременном потоке (Max-Concurrent Flow, MCF) — классическая задача теории потоков, применяемая в оптимизации сетевых систем. Формально:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{p\in\mathcal{P}} x(p) \\ &\text{s.t.} \sum_{p\in\mathcal{P}_e} x(p) \le b_e, \quad \forall e \in E \\ &x(p) \ge 0, \quad \forall p \in \mathcal{P} \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathcal{P}$ — множество путей между корреспонденциями $\mathcal{K} = \bigcup_{s-t\in K} \mathcal{P}_{s-t}$, $x(p)$ — поток по пути p, b_e — пропускная способность ребра e, $\mathcal{P}_e = \{p \in \mathcal{P} \mid e \in p\}$. Цель — максимизировать суммарный поток, не нарушая ограничений на b_e.

Алгоритм Гарга-Кёнемана и связь с онлайн оптимизацией

Алгоритм Гарга-Кёнемана [1; 2] итеративно находит кратчайший путь в графе с весами рёбер, зависящими от их текущей «загруженности», и увеличивает поток по нему. Веса рёбер обновляются мультипликативно: $w(e) \leftarrow w(e)(1+\varepsilon\frac{u}{u(e)})$, где u — «бутылочное горлышко», ε — точность. Эта схема обновления аналогична алгоритмам онлайн оптимизации, таким как Multiplicative Weights (MW) [2] или Exponential Weights (EW) [3]. В них на шаге t выбирается действие i (путь) с вероятностью $\propto w_t(i)$, получается значение (потери) $v_t(i)$, и веса обновляются, например, $w_{t+1}(j) = w_t(j)\exp(\eta v_t(j))$ для EW. MCF можно рассматривать как офлайн-задачу, решаемую онлайн-подходом, где пути — «эксперты», а «потери» — загрузка рёбер.

Модификации алгоритма

Параллельный поиск почти кратчайших путей

Поиск кратчайшего пути на каждой итерации затратен. Для сходимости достаточно $(1+\delta)$-приближённых кратчайших путей [4]. Параллельные алгоритмы для их поиска, например, алгоритм Ли [5] (время $\mathcal{O}(\mathrm{polylog}(n)/\delta^2)$), позволяют сократить общее время алгоритма Гарга-Кёнемана до $\mathcal{O}(m\cdot\mathrm{polylog}(n)/\varepsilon^4)$ (m — число рёбер, n — число вершин), сохраняя гарантии точности.

Сэмплирование путей с помощью MCMC

Вместо детерминированного выбора кратчайшего пути, можно сэмплировать пути стохастически. Интерпретируя $w(e)/u(e)$ как компоненты потенциала, можно сэмплировать пути из распределения Больцмана $\mathbb{P}(P) \propto \exp(-\sum_{e\in P}\frac{w(e)}{u(e)\eta})$ (η — температурный параметр). Для сэмплирования используется MCMC, например, итеративно изменяя текущий путь P_k и принимая новый путь P' по критерию Метрополиса-Гастингса. После обновления $w(e)$ обновляется и $\mathbb{P}$ (например, несколькими шагами MCMC). Вместо точного оракула кратчайшего пути используется стохастический.

Algorithm 1 Семплирование путей через MCMC

$x(p) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}$
$f(e) = 0,\ w(e) = 1 \quad \forall e \in E$
$\mathbb{P} = (m \log m)/\varepsilon^2$ случайных путей из $\mathcal{P}$ по весам $w(e)/u(e)$
while $f(e)/u(e) < (\log m)/\varepsilon^2 \quad \forall e \in E$ **do**
    $P = \mathbb{P}(t)$
    $u = \min_{e \in P} u(e)$
    $x(P) = x(P) + u$
    $f(e) = f(e) + u \quad \forall e \in P$
    $w(e) = (1 + \varepsilon \frac{u}{u(e)}) w(e) \quad \forall e \in P$
    Update($\mathbb{P}$) - обновляем выборку путей. Если в $\mathbb{P}$ макс. отклонение от истинных вероятностей было δ', то после обновления весов отклонение будет $\leq \delta' + \varepsilon$
end while
Ensure: $x / \max_{e \in E}(f(e)/u(e))$

Адаптивное взвешивание и другие онлайн алгоритмы

Перспективно применение адаптивных техник изменения ε [6] и использование более современных алгоритмов онлайн оптимизации [7] для MCF.

Заключение

Предложенные модификации алгоритма Гарга-Кёнемана, основанные на онлайн оптимизации, могут повысить его эффективность. Параллелизация, стохастическое сэмплирование путей и адаптивные стратегии потенциально ускоряют вычисления и повышают гибкость алгоритма для сетевых задач.

Благодарности

Работа выполнена под научным руководством Александра Рогозина, которому автор выражает глубокую признательность за ценные советы и обсуждения. Исследования были выполнены при поддержке ежегодного дохода ФЦК МФТИ (целевого капитала № 5 на развитие направлений искусственного интеллекта и машинного обучения в МФТИ).

Использованная литература

1. *Garg N.*, *Könemann J.* Faster and Simpler Algorithms for Multicommodity Flow and Other Fractional Packing Problems // SIAM Journal on Computing. — 2007. — Т. 37, № 2. — С. 630—652. — DOI: 10.1137/S0097539704446232. — eprint: https://doi.org/10.1137/S0097539704446232. — URL: https://doi.org/10.1137/S0097539704446232.
2. *Williamson D. P.* Network Flow Algorithms. — Cambridge University Press, 2019. — DOI: 10.1017/9781316888568.
3. *Bubeck S.* Introduction to Online Optimization. — 2011. — URL: http://sbubeck.com/BubeckLectureNotes.pdf.
4. *Fleischer L.* Approximating fractional multicommodity flow independent of the number of commodities // 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Cat. No.99CB37039). — 1999. — С. 24—31. — DOI: 10.1109/SFFCS.1999.814573.
5. *Li J.* Faster parallel algorithm for approximate shortest path // Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. — New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2020. — С. 308—321. — (STOC 2020). — ISBN 9781450369794. — DOI: 10.1145/3357713.3384268.
6. *Vu D. Q.*, *Antonakopoulos K.*, *Mertikopoulos P.* Fast Routing under Uncertainty: Adaptive Learning in Congestion Games via Exponential Weights // Advances in Neural Information Processing Systems. Т. 34 / под ред. M. Ranzato [и др.]. — Curran Associates, Inc., 2021. — С. 14708—14720. — URL: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2021/file/7b86f36d139d8581d4b5a4f155ba431c-Paper.pdf.
7. *Orabona F.* A Modern Introduction to Online Learning. — 2023. — arXiv: 1912.13213 [cs.LG]. — URL: https://arxiv.org/abs/1912.13213.