

Автоморфизмы кривых Фаддеева

Докладчик: Никита Андрусов

Научный руководитель: Виктор Батырев

МФТИ

22 апреля 2025 г.

Кривая Ферма и её факторы

Будем рассматривать все кривые, как кривые в алгебраическом торе: $T^2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$

Кривая Ферма

$$Fermat_p : x^p + y^p = 1, (x, y) \in T^2, p — \text{простое}$$

На ней действует группа $G = \langle \tau_x, \tau_y \rangle \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$:

$$\tau_x : x \mapsto \xi_p x, y \mapsto y, \tau_y : x \mapsto x, y \mapsto \xi_p y, \text{ где } \xi_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$$

Выберем $H \subset G, H = \langle (a, b) \rangle$, где $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$. Тогда

$F = Fermat_p / H$ — кривая Фаддеева.

Кривые Фаддеева также можно задавать уравнениями вида:

$$y^p = \pm x^k(x \pm 1), 1 \leq k < p - 1$$

Треугольник Ньютона

По кривой можно построить её многоугольник Ньютона. В случае кривой Фаддеева это будет "простой" треугольник: на рёбрах нет целых точек, кроме вершин.

$$F : y^p = \pm x^k(x \pm 1) \mapsto \text{Conv}((0, p), (k, 0), (k + 1, 0))$$

Из формулы Пика это будет треугольник с $\frac{p-1}{2}$ целых точек внутри.

У тора T^2 есть автоморфизмы: обратимые замены вида $x \mapsto x^a y^b$, $y \mapsto x^c y^d$. Тогда $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ — это линейные преобразования решётки, на которой "живёт" треугольник Ньютона.

Треугольник Ньютона

Становится интересной классификация треугольников, соответствующих кривым Фаддеева, с точностью до автоморфизмов решётки и связь этой классификации с выбором подгруппы H при факторизации кривой Ферма.

Предложение

Число классов эквивалентности простых треугольников с площадью $\frac{p}{2}$ равно:

$$\begin{cases} 0, & \text{если } p = 2 \\ 1, & \text{если } p = 3 \\ \frac{p+5}{6}, & \text{если } p \equiv 1 \pmod{6} \\ \frac{p+1}{6}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Триангуляция

$A \subset SL_3(\mathbb{C})$ — конечная абелева подгруппа.

$$A = \langle \text{diag}(\xi_p^{a_1}, \xi_p^{a_2}, \xi_p^{a_3}) \rangle, a_1 + a_2 + a_3 = p$$

$$N = \mathbb{Z}^3 + \sum_{\text{diag}(\xi_p^{b_1}, \xi_p^{b_2}, \xi_p^{b_3}) \in A} \frac{(b_1, b_2, b_3)}{p} \mathbb{Z}$$

В \mathbb{Z}^3 есть базис e_1, e_2, e_3 . Можно рассмотреть стандартный симплекс $\Delta = \text{Conv}(e_1, e_2, e_3)$ и его точки на решётке N : $\Delta \cap N$. Уже в решётке N эти точки образуют как раз простой треугольник площади $\frac{p}{2}$.

В торической геометрии можно по определённому набору конусов (вееру) с решёткой построить алгебраическое многообразие. Оказывается, что \mathbb{C}^3/A — многообразие, как раз построенное по вееру из одного конуса: $e_1\mathbb{R}_{\geq 0} + e_2\mathbb{R}_{\geq 0} + e_3\mathbb{R}_{\geq 0}$ с решёткой N .

Триангуляция

\mathbb{C}^3/A — особое многообразие. Разрешение особенностей такого многообразия связано с разбиением большого конуса на более мелкие конуса. Или, что то же самое — выпуклой триангуляцией Δ на целочисленные треугольники площади $\frac{1}{2}$ (базовые).

Логичный вопрос: как получать такие триангуляции Δ ? Есть конструкция, приходящая из абстрактной алгебраической геометрии: Схемы Гильберта (описана в работе [Cra02]). Предлагается другая конструкция, требующая меньше углубления в абстракцию.

Триангуляция

ΔPQR — простой треугольник, X — точка в ΔPQR

Определим $h(X) := S_{\Delta PQX}^2 + S_{\Delta QRX}^2 + S_{\Delta RPX}^2$

h строго выпукла на внутренности треугольника ΔPQR

Рассмотрим выпуклую трёхмерную область:

$S = \text{Conv}(\{(X, t) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} | X \in \Delta PQR, t \geq h(X)\}) \subset \mathbb{R}^3$

Предложение

Проекция всех конечных граней S на плоскость $z = 0$ задаёт триангуляцию ΔPQR базовыми треугольниками.

Есть программа, которая рисует эти триангуляции: [And25]

Триангуляция

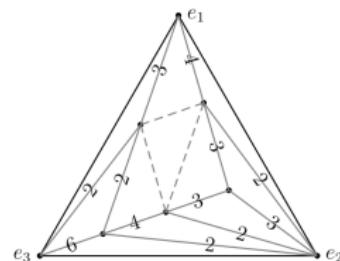


Рис.: Триангуляция из примера 2.2 работы [Cra02]

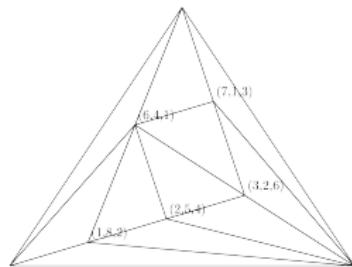


Рис.: Триангуляция, полученная методом, описанным выше. Возле вершин подписаны целочисленные расстояния до сторон

Подгруппа автоморфизмов

$$X : y^p + x^k(x+1) = 0, \quad p \equiv 1 \pmod{6}, \quad k^3 \equiv -1 \pmod{p}, \quad k \neq -1 \pmod{p}$$

Тогда есть автоморфизм ψ , переставляющий вершины треугольника Ньютона ($\psi^3 = id$)

Всегда есть автоморфизм $\varphi : x \mapsto x, y \mapsto \xi_p y, \varphi^p = id$

Они оба — автоморфизмы тора T^2 , которые оставляют на месте X , то есть при сужении на X задают автоморфизмы X .

Вопрос: как устроена группа $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ и группа

$$G|_X = \langle \varphi|_X, \psi|_X \rangle?$$

Предложение

$$G|_X \cong G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Группа автоморфизмов

Как устроена вся группа автоморфизмов кривой Фаддеева X ?
Пока непонятно, намечены ещё два подхода:

- ▶ Изучить, как эта группа действует на $\text{Jac}(X)$ — якобиане кривой. Для этого надо понять, как устроен якобиан. Для квартиki Кляйна это уже сделали в работе [ММ22] — можно действовать по аналогии;
- ▶ Изучить, какие детские рисунки соответствуют кривым Фаддеева. Для этого надо разобраться с теорией детских рисунков. Это я планирую делать по книге [Зво10].

Источники

- [Cra02] Alastair Craw. *An explicit construction of the McKay correspondence for A-Hilb C^3* . 2002. arXiv: math/0010053 [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0010053>.
- [Зво10] Ландо С.К. Звонкин А.К. *Графы на поверхностях и их приложения*. МЦНМО, 2010.
- [MM22] Dimitri Markushevich и Anne Moreau. *Action of the automorphism group on the Jacobian of Klein's quartic curve*. 2022. arXiv: 2107.03745 [math.AG]. URL: <https://arxiv.org/abs/2107.03745>.
- [And25] Nikita Andrusov. *Faddeev curves Newton triangle triangulation image generator*. Вер. 1.0. Апр. 2025. URL: https://github.com/AndrusovN/faddeev_triangulation.