Грубые концы метрических пространств

Старков Михаил

Научный руководитель: А. А. Арутюнов, ИПУ РАН

МФТИ

22 апреля 2025 г.

Концы пространств

Определение

Метрическое пространство (X, ρ) называется M-связным, если для любых точек $A, B \in X$ существует набор точек $\{A_i\}_{i=0}^N \subset X$, такой что $A_0 = A,\ A_N = B,\ \rho(A_i, A_{i-1}) \leqslant M\ \forall i \in \overline{1, n}$.

Для собственного метрического пространства X, ограниченного $Q \subset X$ и положительного числа μ обозначим через $\mathscr{U}_Q^{X,\mu}$ множество неограниченных компонент μ-связности в $X \setminus Q$.

Пусть X - собственное метрическое пространство и существует последовательность ограниченных множеств, исчерпывающая X, т.е. такая $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$, что

1. $\forall i : Q_i \subset Q_{i+1}$;
2. $\cup_{i=1}^{\infty} Q_i = X$.

Число μ-концов пространства X определяется как

$$e_\mu(X) := \max_{i \in \mathbb{N}} |\mathscr{U}_{Q_i}^{X,\mu}|$$

Общие определения

$\varphi\colon (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ - отображение метрических пространств.

Определение

Отображение φ называется собственным, если для каждого ограниченного $U \subset Y$, прообраз $\varphi^{-1}(U)$ ограничен.

Определение

Отображение φ называется борнологическим, если

$$\forall \delta > 0 \; \exists S_\delta \; \forall x, x' \in X : \; \rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) < S_\delta.$$

Определение

Отображение φ называется грубым, если оно собственное и борнологическое.

Теорема 1

Пусть X, Y — собственные метрические пространства, X μ-связно, $\varphi\colon X \to Y$ — грубое и сюрьективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X:\ \rho_X(x, x') \leqslant \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leqslant \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geqslant e_\nu(Y)$.

Доказательство теоремы

Рассмотрим последовательность $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченных множеств, исчерпывающую Y. Тогда $\{\varphi^{-1}(Q_i)\}$ исчерпывает X.
Идея: для каждого натурального n построить сюръективное отображение

$$\eta\colon \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)} \to \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}.$$

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$.
Для $W \in \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)}$ множество $\varphi(W) \subset Y \setminus Q_n$ неограничено и ν-связно. Значит $\varphi(W)$ целиком содержится в некотором $V \in \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}$.

Для $W \in \mathscr{U}^{X,\mu}_{\varphi^{-1}(Q_n)}$ положим $\eta(W) := V \in \mathscr{U}^{Y,\nu}_{Q_n}$, если $\varphi(W) \subset V$.
Остается доказать сюръективность η.

Доказательство сюръективности η

Предложение

Пусть X — собственное μ-связное метрическое пространство, $Q \subset X$ ограничено. Тогда объединение всех ограниченных компонент μ-связности в $X \setminus Q$ ограничено.

Зафиксируем произвольное $V \in \mathscr{U}_{Q_n}^{Y,\nu}$. Т.к. $\varphi^{-1}(V)$ неограничено, а объединение всех ограниченных компонент μ-связности в $X \setminus \varphi^{-1}(Q_n)$ ограничено по предложению, то существует неограниченная компонента μ-связности $W \in \mathscr{U}_{\varphi^{-1}(Q_n)}^{X,\mu}$, образ которой пересекает V, а значит и целиком содержится в V.

Таким образом, построенное ранее отображение $\eta\colon \mathscr{U}_{\varphi^{-1}(Q_n)}^{X,\mu} \to \mathscr{U}_{Q_n}^{Y,\nu}$ сюръективно.

Поскольку $n \in \mathbb{N}$ произвольное, то $e_\mu(X) \geqslant e_\nu(Y)$.

$\square$

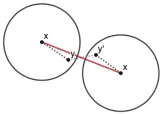
Доказательство предложения

Доказательство. Рассмотрим в X решетку Λ, т.е множество точек, т.ч.

1. $\forall x, x' \in \Lambda : \ (\rho(x, x') \geqslant \mu)$
2. $\forall x \in X \ \exists y \in \Lambda : \ (\rho(x, y) < \mu)$

Рассмотрим теперь граф Γ с $V = \Lambda$. Множество ребер определим так:

$$xx' \in E \Leftrightarrow \exists y \in B_\mu(x), \ y' \in B_\mu(x') : \ (\rho(y, y') \leqslant \mu)$$



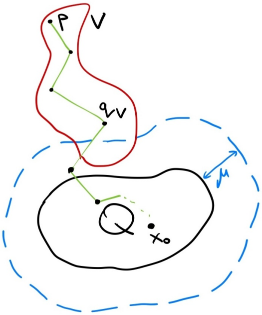
Для $S \subset X$ и $r > 0$ обозначим $U_r(S) := \{x \in X : \rho(x, S) < r\}$

Обозначим через $\mathscr{A}$ множество компонент μ-связности в $X \setminus Q$, не лежащих целиком в $U_{2\mu}(Q)$. Достаточно доказать, что $\mathscr{A}$ конечно.

Доказательство предложения

Зафиксируем точку $x_0 \in \Lambda \cap U_\mu(Q)$.

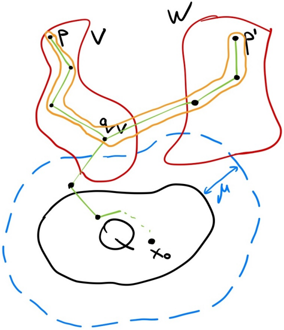
Зафиксируем $V \in \mathscr{A}$. Так как $V \not\subset U_{2\mu}(Q)$, то существует $p \in \Lambda \cap V \setminus U_\mu(Q)$. Поскольку X μ-связно, то граф Γ связен. Тогда существует путь в Γ из p в x_0. Выберем на этом пути вершину q_V — первую вершину с тем свойством, что следующая вершина пути лежит в $U_\mu(Q)$. Положим $\theta(V) := q_V$.



Доказательство предложения

Построенное таким образом отображение $\theta\colon \mathscr{A} \to \Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ инъективно. Действительно, если $\theta(V) = \theta(W) = q_V$, то найдутся точки $p \in V, p' \in W$, связанные путем в $X \setminus Q$, проходящим через q_V. Значит $|\mathscr{A}| \leqslant |\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)|$.

Множество $\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ замкнуто и ограничено, значит является компактом. Если $\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)$ бесконечно, то $\{B_\mu(x)\}_{x \in \Lambda \cap U_{4\mu}(Q)}$ образует открытое покрытие, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие. Значит $|\Lambda \cap U_{4\mu}(Q)| < +\infty$.



Концы графов

Пусть группа G задана набором образующих $\mathscr{X}$

Определение

Определим граф $Cayley(G, \mathscr{X})$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются элементы группы — $V(sk(G)) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathscr{X}$, если $ax = b$

Определение

Определим граф $sk(G)$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются элементы группы — $V(sk(G)) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathscr{X}$, если $x^{-1}ax = b$

Обозначим компоненту связности элемента $u \in G$ через $sk_u(G)$.

Концы графов

Теорема (Хопф)

Число концов графа Cayley$(G, \mathscr{X})$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

Гипотеза

Число концов графа $\mathrm{sk}_u(G)$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

Пусть $f: X \to Y$ - отображение графов.

Определение

Мы говорим, что f обладает свойством поднятия путей, если для любого пути $v = v_1 v_2 \dots$ в Y и вершины $u_1 \in f^{-1}(v_1)$ существует путь $u = u_1 u_2 \dots$ в X, т.ч. $f(u_i) = v_i \ \forall i$. Тогда путь u называется поднятием пути v из вершины u_1.

Теорема 2

Пусть отображение графов $f: X \to Y$ сюръективно, переводит соседние вершины в соседние и обладает свойством поднятия путей. Тогда $e(X) \geqslant e(Y)$.

$\zeta : \mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X}) \to \mathrm{sk}_u(G)$ определено следующим образом.

• вершина g переходит в $g^{-1}ug$;

• Ребро, помеченное элементом $x \in \mathscr{X}$, переходит в ребро между вершинами, помеченное тем же элементом x.

$\Rightarrow$ Отображение ζ сюръективно, обладает свойством поднятия путей, но может склеивать соседние вершины.

Планы до конференции

1. Ослабить условия теоремы 2, чтобы ζ под них подходило;
2. Разобраться со случаем $e(\mathrm{Cayley}(G, \mathscr{X})) = \infty$

Спасибо за внимание!