Гибридный алгоритм решения задачи линейного программирования

студент Богданов Азат Газимович
руководитель Хильдебранд Роланд

Введение

В работе рассматривается задача линейного программирования(ЛП)

$$\min_{x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^m} \langle c, x \rangle : Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times m},\ b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^m$$

Для нее двойственная задача имеет вид

$$\max_{s \geq 0,\ s \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n} \langle y, b \rangle : s + A^T y = c$$

Условие оптимальности можно записать так

$$\langle s, x \rangle = 0$$

Постановка задачи

Решаем задачу Линейного Программирования - задача оптимизации с ограниченными ресурсами, например минимизация затрат или максимизация прибыли.

Нужно усовершенствовать гибридный алгоритм на основе метода внутренней точки(МВТ), использующий решение аппроксимирующих задач на основе конусов Дикина и уменьшения размерности, основывающийся на требовании оптимальности решения

Основная идея

Вместо исходной задачи решаем вспомогательную, которая аппроксимирует.

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m}\left(\langle c,x\rangle+\mu\cdot F(x)\right):\mu>0,\;\; F(x)=-\sum_{i=1}^{m} log x_i$$

Где μ - параметр, F(x) - барьер, который неявно задает ограничение нахождения решения строго внутри ортанта.

На основе этого барьера получаем эллипсоид Дикина

$$E_{\omega,F}=\{\omega+u\mid u^T F''(\omega)u\leq 1\}:\omega\in\mathbb{R}^m,\omega\geq 0,u\in\mathbb{R}^m$$

А на основе него конус, в котором мы аналитически ищем решение.

Основная идея

Таким образом мы можем получить верхнюю оценку решения исходной задачи ЛП.

Рассмотрим пару x_i, s_i Требуется условие $x_i \cdot s_i = 0$

Аппроксимирующие конусы построены для прямой и обратной задач, поэтому они ограничивают решение сверху и снизу.

Основная идея

Из условия $x_i \cdot s_i = 0$ следует, что $x_i = 0$ либо $s_i = 0$.

Предположим, что $x_i = 0$. Тогда в аппроксимационной задаче появляется требование данное требование. И если, решение данной задачи V будет выше оптимума V* V>V*, то предположение неверное, значит $s_i = 0$. Аналогично для двойственной задачи. Однако может случиться такое, что мы не отметем пару. Тогда перейдем к следующей.

Задачи

1. Вывести аналитические решения для модифицированных вспомогательных задач.

2. Реализовать алгоритм, их считающий.

3. Получить оценки на количество переменных, которые отметаются алгоритмом.

Литература

собрана тут