Оценки чисел Рамсея для произвольных последовательностей графов

Докладчик: Беремкулов Алан
Научный руководитель: Райгородский Андрей Михайлович

МФТИ

15 апреля 2025 г.

Числа Рамсея

Напоминание:

- Числом Рамсея $R(m, n)$ называют наименьшее натуральное число N, такое что в полном графе на N вершинах при раскраске ребер в два цвета найдется либо клика на m вершинах первого цвета, либо клика на n вершинах второго цвета.
- $\alpha(G)$ - число независимости графа G, мощность максимального по размеру независимого множества в графе.

Числа Рамсея для последовательностей графов

Определение:

- Дана произвольная последовательность графов $\{G_n\}, n \in \mathbb{N}$. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим за $R_{min}(\{G_n\}, k)$ минимальное натуральное m, такое что для любого остовного подграфа G графа G_m либо в G, либо в $G_m \backslash G$ есть индуцированный подграф графа G_m на k вершинах. $G_m \backslash G$ следует понимать как дополнение графа G до графа G_m.
- Аналогично определим $R_{max}(\{G_n\}, k)$ как максимальное натуральное m, такое что существует остовный подграф G графа G_m, что ни в нем, ни в $G_m \backslash G$ нет индуцированных k-вершинных подграфов графа G_m

Числа Рамсея для последовательностей графов

Обозначая за K_n полный граф на n вершинах, становится понятно, что

$$R(k,k) = R_{min}(\{K_n\},k) = R_{max}(\{K_n\},k) + 1$$

Причиной тому служит то, что у K_n нет индуцированных подграфов не являющихся кликами.
Так же, в силу определения:

$$R_{min}(\{G_n\},k) \leq R_{max}(\{G_n\},k) + 1$$

Известные результаты

- графом Джонсона $G(n, r, s)$ называется граф, где вершинами служат все возможные r-элементные подмножества множества $\{1, 2, ..., n\}$, а ребрами соединены те подножества, у которых мощность пересечения ровно s
- Теорема 1: Пусть $r = r(n)$, $s = s(n)$, при этом:
  1. Если при всех достаточно больших n выполнено $r - s \geq 2$, то $r^3 = o(n/\ln n)$.
  2. Если при всех достаточно больших n выполнено $r - s = 1$, то $r^3 = o(n/\ln^3 n)$.
  3. Функции C_n^r и C_{n-s}^{r-s} строго монотонно возрастают.

  Тогда существует такое K_0, что для любого $k \geq k_0$ имеет место точное равенство:

$$R_{max}(\{G(n, r, s)\}, k) = m$$

Где m таково, что $C_{m-s(m)}^{r(m)-s(m)} < k \leq C_{m+1-s(m+1)}^{r(m+1)-s(m+1)}$

Известные результаты

- Теорема 2: Пусть $G_n = (V_n, E_n), N_n = |V_n|, \alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть γ_n - это максимальное число вершин графа G_n, которые не смежны с обеими вершинами данного ребра. Допустим, величины N_n, α_n, γ_n монотонно стремятся к бесконечности, причем $\alpha_n = o(N_n)$ и существует такая функция β_n, что выполнены следующие условия:
  1. $\beta_n > \gamma_n, \beta_n = o(\alpha_n)$
  2. $log_2 N_n = o(\frac{\alpha_n}{\beta_n})$
  3. $log_2 N_n = o(\beta_n - \gamma_n)$

  Пусть ϕ_n - любая функция, которая стремится к нулю при $n \to \infty$ и с которой все еще верно, что $log_2 N_n = o(\phi_n(\beta_n - \gamma_n))$. Тогда существует такое k_0, что для любого $k \geq k_0$ выполнено неравенство $R_{max}(\{G_n\}, k) \geq m$, где m - максимальное натуральное число, удовлетворяющее условиям $k \geq \alpha_m(1 + \phi_m), k < N_m$. Если же m таково, что $k \leq \alpha_m$, то $R_{max}(\{G_n\}, k) < m$

Известные результаты

- Первая теорема дает точное значение числа Рамсея для некоторого семейства графов.
- Вторая теорема дает асимптотическое значение числа Рамсея для некоторого семейства графов.
- Заметим, что $K_n = G(n, 1, 0)$, и в таком случае условия обеих теорем нарушается, так как в первом случае функция $C_{n-s}^{r-s} = C_{n-1}^{0}$ не возрастает, а во втором случае число независимости $\alpha_n = 1$ также не возрастает.

Что по R_{min}?

Пусть дана последовательность графов $\{G_n\}$ Заметим, что если $\alpha(G_m) \geq k$ для некоторых натуральных m, k, то

$$R_{min}(\{G_n\}, k) \leq m$$

так как в качестве индуцированного подграфа из определения R_{min} можно взять независимое множество размера k. Заметим, что $\alpha(G(n,r,s)) \geq C_{n-s-1}^{r-s-1}$. В качестве независимого множества можно взять вершины графа удовлетворяющие следующему виду: $\{1, 2, ..., s+1, n_1, n_2, ..., n_{r-s-1}\}, s+1 < n_i \leq n$. Это наталкивает на следующий частный результат: при фиксированных r и s

$$R_{min}(\{G(n,r,s)\}, C_{t-s-1}^{r-s-1}) \leq t$$

Что по R_{min}?

Преобразуем наше выражение. Пусть $k = C_{t-s-1}^{r-s-1}$. Найдем из этого выражения асимптотическую оценку t. Известно, что при больших a и фиксированном b: $C_b^a \sim \frac{a^b}{b!}$. Получаем:

$$k \sim \frac{(t-s-1)^{r-s-1}}{(r-s-1)!}$$

Откуда

$$t-s-1 \sim (k*(r-s-1)!)^{\frac{1}{r-s-1}}$$

Откуда

$$t \sim s+1+(k*(r-s-1)!)^{\frac{1}{r-s-1}}$$

Итоговый результат:

$$R_{min}(\{G(n,r,s)\},k) \leq (1+o(1))(k*(r-s-1)!)^{\frac{1}{r-s-1}}$$

При фиксированных r, s и $n \to \infty$

Аналогичные результаты

При r = 3 и s = 1 получаем: $R_{min}(\{G(n,3,1)\},k) \leq k+2$
Если $r < 2s+1$, то есть оценка лучше:

$$R_{min}(\{G(n,r,s)\},k) \leq (1+o(1))(\frac{k*r!*(r-s-1)!}{(2r-2s-1)!})^{\frac{1}{s}}$$

Получающаяся аналогично из оценки числа независимости при помощи систем Штейнера
$\alpha(G(n,r,s)) \geq h(n,2r-s-1,s-1)C_{2r-s-1}^{r}$, где $h(m,k,t) = max\{h : \exists A_1, ..., A_h \subset \{1,...,m\} \forall i |A_i| = k \forall i,j : |A_i \cap A_j| \leq t\}$

Частные оценки для R_{max}

Обозначим за $G_{\frac{1}{2}}(n, r, s)$ случайный граф, в котором ребра появляются с вероятностью $\frac{1}{2}$. Про него мы знаем, что а.п.н:

$$\alpha(G_{\frac{1}{2}}(n, r, s)) = \begin{cases} (1 + o(1))\alpha(G(n, r, s)), r > 2s + 1 \\ \Theta(\alpha(G(n, r, s)) \ln n), r \leq 2s + 1 \end{cases}$$

С ненулевой вероятностью выполняется следующее условие: существует остовный подграф графа $G(n, r, s)$, что и в нем, и в его дополнении в любом индуцированном подграфе размера большего чем $\alpha(G_{\frac{1}{2}}(n, r, s))$ есть хотя бы одно ребро от графа $G(n, r, s)$ и отсутствует хотя бы одно ребро от графа $G(n, r, s)$. Это условие является условием для выражения R_{max}, и поэтому мы получаем оценку:

$$R_{max}(\{G(n, r, s)\}, \alpha(G_{\frac{1}{2}}(k, r, s))) \geq k$$

План работы

- Найти больше интересных примеров последовательностей графов для изучения их чисел Рамсея
- Подробнее расписать частный результат, представленный на предыдущем слайде
- Найти оценки для R_{min} и R_{max} не завязанных на числе независимости

Литература

- О числах Рамсея для произвольных последовательностей графов
  DOI: 10.31857/S2686954322010052
- The existence of designs II
  arxiv:1802.05900
- О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе
  eISSN: 2305-2880