Числа Ван-Дер-Вардена для многомерных арифметических последовательностей

докладчик: Дадабаев Рауфджон
Научный руководитель: доцент, к. ф. - м. н. Глибичук А.А.

МФТИ

15 апреля 2025

Постановка задачи

1. w(k; r) — минимальное такое число, что любое раскрашивание чисел от 1 до w(k; r) в r цветов содержит монохроматическую арифметическую прогрессию длины k.
2. Многомерная арифметическая прогрессия это подмножество натуральных чисел вида $Q(a_0, l_1, \ldots, l_m) = \{a_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \mid 0 \le x_i \le l_i - 1\}$
3. Числа l_1, … l_m называют длинами арифметической прогрессии
4. Теперь определим что такое число $w(l_1; l_2;\ldots;l_m; r)$ — такое число, что любое раскрашивание чисел от 1 до $w(l_1; l_2;\ldots;l_m; r)$ в r цветов содержит монохроматическую многомерную арифметическую прогрессию с длинами l_1, … ,l_m.

Введение

При анализе доказательства теоремы Ван дер Вардена и выходящих из нее утверждений получилось показать корректность теоремы для многомерной арифметической прогрессии

Утверждение

Для любых целых положительных $l_1, l_2, \ldots, l_m, r$

число $w(l_1; l_2; \ldots; l_m; r)$ существует.

Доказательство

Строим множество S состоящее из элементов $\{ \sum_{i=1}^{m} x_i d_i \mid 0 \leq x_i \leq l_i - 1\}$ далее, знаая что S конечное представим S= {s1,s2,...,sn}. Пусть $s_n = \max(\{s : s \in S\})$ и $w = w(s_n + 1; r)$, при любой раскраске в r цветов отрезка [1; w] существует монохроматическая арифметическая последовательность $\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+s_n d\}$ для каких то a,d >= 1, но так как a + dS является подмножеством данной последовательности то a + dS = {a +s1*d, a + s2*d, . . . , a + sn*d} является многомерной монохроматической последовательностью с длинами $l_1, \ldots l_m$.

Теорема Гауверса

$w(k;2) \le 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}$ для k >= 2, ограничим сверху число w(k; r):

Введем функцию ***tower***(k) = $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k\ 2\text{'s}}$ и ***tower***(k, x) – “башня” из двоек где на вершине стоит x. Тогда w(k; 2) <= tower(5, k + 9)

Также Гауверс доказал более сильное утверждение:

Положим $f(k;r) = r^{2^{2^{k+9}}}$ тогда выполнено следующее неравенство:

$w(k;r) \le 2^{2^{f(k;r)}}$

Ссылки на литературу

https://drive.google.com/file/d/1k5bQUxacjaZlLjMLkyUuSwIBdvI07Otc/view?usp
=sharing
https://drive.google.com/file/d/1onZvo--28jI_RAT72xUVhZb2wKfNVAn7/view?usp=share_link