

# Числа Ван-Дер-Вардена для многомерных арифметических последовательностей


докладчик: Дадабаев Рауфджон

Научный руководитель: доцент, к. ф. - м. н. Глибичук А.А.

МФТИ

15 апреля 2025

# Постановка задачи

1.  $w(k; r)$  — минимальное такое число, что любое раскрашивание чисел от 1 до  $w(k; r)$  в  $r$  цветов содержит монохроматическую арифметическую прогрессию длины  $k$ .
  2. Многомерная арифметическая прогрессия это подмножество натуральных чисел вида  $Q(a_0, l_1, \dots, l_m) = \{a_0 + \sum_{i=1}^m x_i d_i \mid 0 \leq x_i \leq l_i - 1\}$
  3. Числа  $l_1, \dots, l_m$  называют длинами арифметической прогрессии
  4. Теперь определим что такое число  $w(l_1; l_2; \dots; l_m; r)$  — такое число, что любое раскрашивание чисел от 1 до  $w(l_1; l_2; \dots; l_m; r)$  в  $r$  цветов содержит монохроматическую многомерную арифметическую прогрессию с длинами  $l_1, \dots, l_m$ .
- 

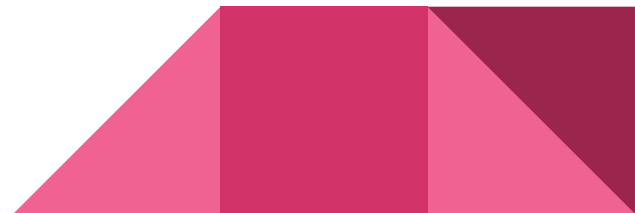
# Введение

При анализе доказательства теоремы Ван дер Вардена и выходящих из нее утверждений получилось показать корректность теоремы для многомерной арифметической прогрессии



# Утверждение

Для любых целых положительных  $l_1, l_2, \dots, l_m, r$   
число  $w(l_1; l_2; \dots; l_m; r)$  существует.



# Доказательство

Строим множество  $S$  состоящее из элементов  $\{ \sum_{i=1}^m x_i d_i \mid 0 \leq x_i \leq l_i - 1 \}$  далее, зная что  $S$  конечное представим  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Пусть  $s_n = \max(\{s : s \in S\})$  и  $w = w(s_n + 1; r)$ , при любой раскраске в  $r$  цветов отрезка  $[1; w]$  существует монокроматическая арифметическая последовательность  $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+s_n d\}$  для каких то  $a, d \geq 1$ , но так как  $a + dS$  является подмножеством данной последовательности то  $a + dS = \{a + s_1 d, a + s_2 d, \dots, a + s_n d\}$  является многомерной монокроматической последовательностью с длинами  $l_1, \dots, l_m$ .




# Теорема Гауверса

$w(k; 2) \leq 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}$  для  $k \geq 2$ , ограничим сверху число  $w(k; r)$ :

Введем функцию  $\mathbf{tower}(k) = \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{k \text{ } 2\text{'s}}$  и  $\mathbf{tower}(k, x)$  – “башня” из двоек где на вершине стоит  $x$ . Тогда  $w(k; 2) \leq \mathbf{tower}(5, k + 9)$

Также Гауверс доказал более сильное утверждение:

Положим  $f(k; r) = r^{2^{k+9}}$  тогда выполнено следующее неравенство:

$$w(k; r) \leq 2^{2^{f(k; r)}}$$


# Ссылки на литературу

<https://drive.google.com/file/d/1k5bQUxacjaZILjMLkyUuSwlBdvl070tc/view?usp=sharing>

[https://drive.google.com/file/d/1onZvo--28jI\\_RAT72xUVhZb2wKfNVAn7/view?usp=share\\_link](https://drive.google.com/file/d/1onZvo--28jI_RAT72xUVhZb2wKfNVAn7/view?usp=share_link)

