

Улучшение верхних оценок диагональных чисел Рамсея

Минеев Дмитрий Александрович

Научный руководитель:

Райгородский Андрей Михайлович (ФПМИ МФТИ)

15.04.2025

Экспоненциальное улучшение верхней оценки многоцветных чисел Рамсея

В октябре 2024 г. Балистер, Боллобаш, Кампос, Гриффитс, Хёрли, Моррис, Сахасрабух и Тиба [адаптировали](#) книжный алгоритм для многоцветного случая и получили по сути первое улучшение оценки Эрдёша и Секереша 1935 г.

Доказанная ими теорема звучит так: для любого фиксированного $r \in \mathbb{N}_1$, $r \geq 2$ существует $\delta = \delta(r) > 0$ такое, что

$$R_r(k) \leq e^{-\delta k} r^{rk}$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$.

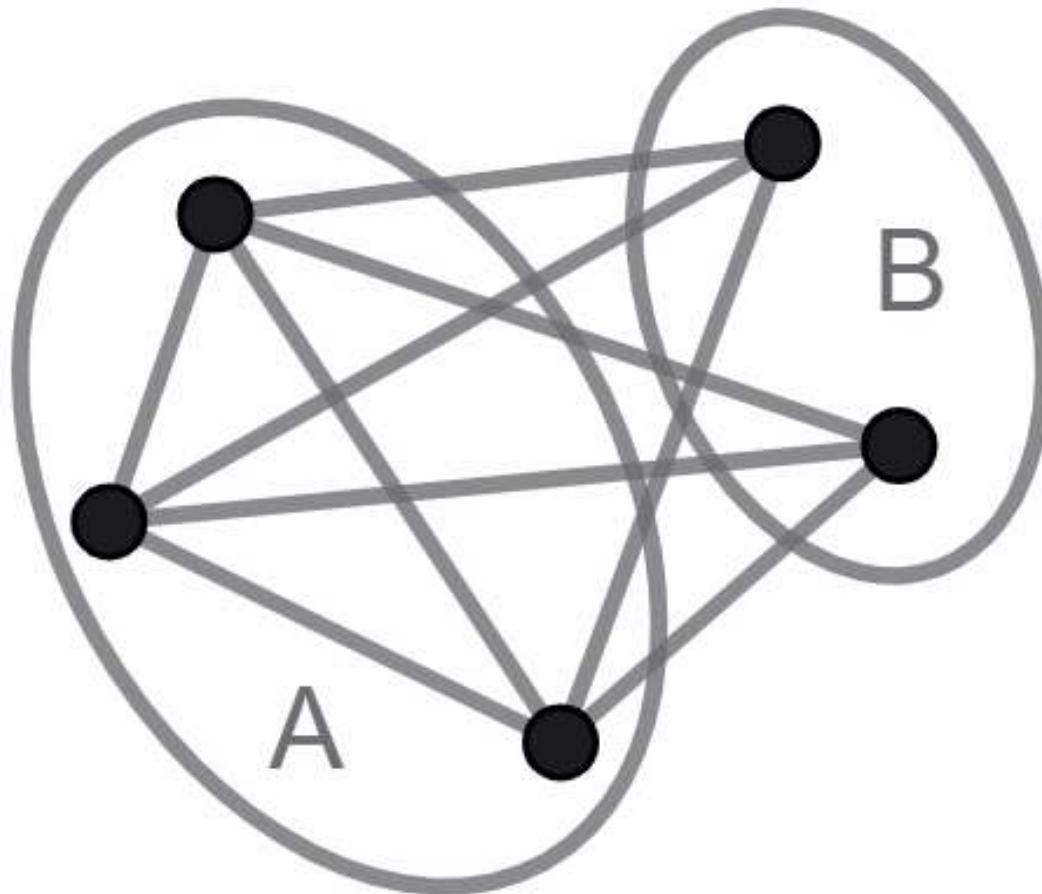
Вместо клики ищем книгу

Опр. Книгой называется граф с множеством вершин $V = A \cup B$, где $A \cap B = \emptyset$, такой, что все вершины из множества A попарно соединены рёбрами, все вершины из B соединены рёбрами со всеми вершинами из A , но при этом вершины из B не соединены между собой.

Неформально говоря, A – это «корешок» книги, а B – множество её «страниц».

Книгу, для которой $|A| = t$, $|B| = m$, будем называть (t, m) -книгой.

Пример книги



Вместо клики ищем книгу

Пусть нам дана раскраска χ в r цветов рёбер полного графа на n вершинах. И мы хотим доказать, что $R_r(k) \leq n$. Т.е. хотим доказать, что какова бы ни была χ , мы найдём одноцветную k -клику.

Идея: вместо одноцветной k -клики искать одноцветную $(t, R_r(k, k, \dots, k, k - t))$ -книгу для некоторого $t \in \mathbb{N}_1$.

Как искать книгу? И какого цвета?

Итак, мы переформулировали задачу, но проще она, кажется, не стала: книга имеет еще более сложную структуру, чем клика. Да и как её искать тоже совершенно непонятно.

Многоцветный книжный алгоритм

Будем не искать, а строить книгу. И даже не одну книгу, а сразу r книг: по одной на каждый цвет.

Особым образом выберем стартовые множества вершин X, Y_1, \dots, Y_r из исходного множества вершин. Также на старте алгоритма положим $T_1 = \dots = T_r = \emptyset$.

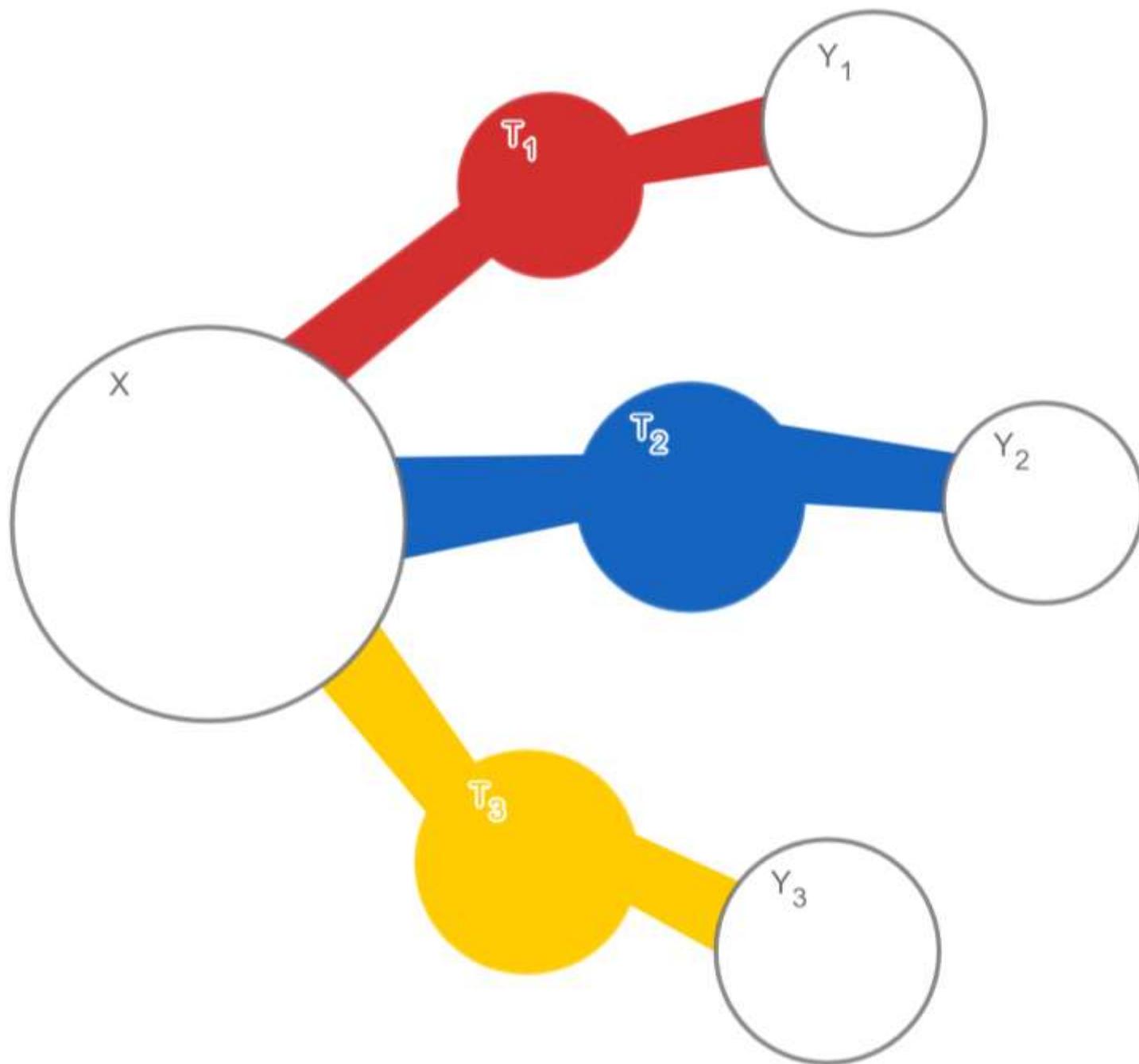
Постепенно перекидывая вершины из множества X в множества T_1, \dots, T_r , а также сужая множества X, Y_1, \dots, Y_r , мы будем строить книги с «корешками» T_i и множествами «страниц» Y_i ($i \in \overline{1, \dots, r}$).

Многоцветный книжный алгоритм

Чтобы в итоге у нас получились искомые книги, важно, чтобы на любом шаге алгоритма $\forall i \in \overline{1, \dots, r}$ все вершины из множества T_i были соединены со всеми вершинами из множеств X и Y_i только рёбрами i -того цвета. Как следствие из этого будет получаться, что внутри T_i все вершины также будут соединены только рёбрами i -того цвета.

Многоцветный книжный алгоритм

Также, что уже не так очевидно, важно, чтобы $\forall i \in \overline{1, \dots, r}$ особым образом определенная «плотность» рёбер i -того цвета между множествами X и Y_i не уменьшалась слишком сильно. Вообще говоря, большая часть работы как раз посвящена тому, чтобы следить за тем, чтобы эта «плотность» не убывала слишком быстро.



Грустные новости

$$\begin{aligned}\delta &= 2^{-160}r^{-12}, \\ k &\geq 2^{160}r^{16}.\end{aligned}$$

Планы на оставшуюся часть семестра

Изучить статью, посвященную следующей теореме: для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$ верна оценка

$$R_2(k, k) \leq 3.8^{k+\bar{o}(k)}.$$

Ссылки на литературу

- [An exponential improvement for diagonal Ramsey](#) (Marcelo Campos, Simon Griffiths, Robert Morris, Julian Sahasrabudhe), 2023 г.
- [Optimizing the CGMS upper bound on Ramsey numbers](#) (Parth Gupta, Ndiame Ndiaye, Sergey Norin, Louis Wei), 2024 г.
- [Upper bounds for multicolour Ramsey numbers](#) (Paul Balister, Béla Bollobás, Marcelo Campos, Simon Griffiths, Eoin Hurley, Robert Morris, Julian Sahasrabudhe, Marius Tiba), 2024 г.

Спасибо за
внимание!