Лемма ККМ для решения задач оптимизации

Докладчик: Коваленко Дмитрий Борисович
Руководитель: Блудов Михаил Васильевич, МФТИ

11.03.2025

Вспомним задачу

Задача линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, c \rangle,$$

$$\text{s.t. } Ax \geqslant b$$

Вспомним задачу

Задача линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x, c \rangle,$$
$$\text{s.t. } Ax \geqslant b$$

Задача оптимизации произвольной непрерывной (выпуклой) функции:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$
$$\text{s.t. } Ax \geqslant b$$

Проблемы алгоритма

1. Нужно расширить алгоритм для случая $c \in \operatorname{conv}(A)$.

Проблемы алгоритма

1. Нужно расширить алгоритм для случая $c \in \operatorname{conv}(A)$.
2. Готового алгоритма для поиска множества S в Лемме ККМ для многогранников может не существовать и он может быть достаточно медленным.

Напомним теоремы

Theorem (Лемма ККМ)

*Пусть Δ^n – n-мерный симплекс на $n+1$ вершине и $\{a_1, \dots a_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ множество его вершин. Назовём семейство $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$ замкнутых множеств **ККМ-покрытием**, если для любого множества $I \subseteq [n]$ выполнено $\mathrm{conv}\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$. Тогда для любого ККМ-покрытия выполнено $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$.*

Напомним теоремы

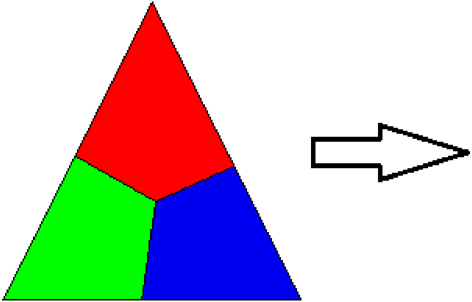
Theorem (Лемма ККМ)

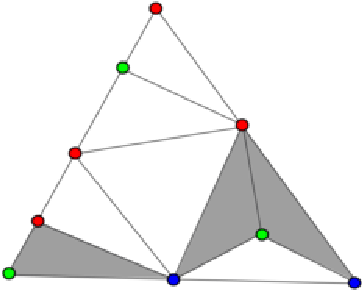
*Пусть Δ^n – n-мерный симплекс на $n+1$ вершине и $\{a_1, \dots a_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ множество его вершин. Назовём семейство $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$ замкнутых множеств **ККМ-покрытием**, если для любого множества $I \subseteq [n]$ выполнено $conv\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$. Тогда для любого ККМ-покрытия выполнено $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \varnothing$.*

Theorem (Лемма Шпернера)

Пусть σ – n-мерный симплекс на $n+1$ вершине и $\{a_1, \dots a_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ множество его вершин, покрашенных в $n+1$ цвет. Пусть T некоторая триангуляция симплекса σ. Если каждая вершина триангуляции на грани симплекса σ покрашена в один из цветов вершин этой грани, то найдётся симплекс триангуляции T с вершинами всех цветов.

Напомним теоремы





Общий вид задачи

Пусть у нас получилось переформулировать условие так, что задача оптимизации свелась нахождению сбалансированной точки в Лемме ККМ. В этой статье предложены алгоритмы и следующие оценки времени работы:

Общий вид задачи

Пусть у нас получилось переформулировать условие так, что задача оптимизации свелась нахождению сбалансированной точки в Лемме ККМ. В этой статье предложены алгоритмы и следующие оценки времени работы:

1. Если покрывающие множества являются пересечением симплекса с полупространством, то найти ε-близкое решение можно за $O\left((d-1)^2 \log_2\left(\frac{d-1}{\varepsilon}\right)\right)$ запросов, где $(d-1)$ – размерность симплекса.

Общий вид задачи

Пусть у нас получилось переформулировать условие так, что задача оптимизации свелась нахождению сбалансированной точки в Лемме ККМ. В этой статье предложены алгоритмы и следующие оценки времени работы:

1. Если покрывающие множества являются пересечением симплекса с полупространством, то найти ε-близкое решение можно за $O\left((d-1)^2 \log_2\left(\frac{d-1}{\varepsilon}\right)\right)$ запросов, где $(d-1)$ – размерность симплекса.
2. Если покрывающие множества являются выпуклыми, то в случае $d = 3$ найти ε-близкое решение можно за $O\left(\log_2^2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ запросов.

Взгляд с другой стороны

Текст и изображения из Herbert E. Scarf.

Пусть T семейство подмножеств множества $[n]$. Будем обозначать за E^S подпространство в евклидовом пространстве $E^n(\mathbb{R}^n)$, натянутое на координаты с номерами из множества $S \in T$. Пусть множества $V^S \subset E^S$ замкнуты, ограничены, и если для некоторых векторов $x \in V^S$ и $y \in E^S$ выполнено $y \leqslant x$, то $y \in V^S$.

Также будем называть семейство T сбалансированным, если найдутся такие веса δ_S, что выполнено

$$\sum_{S \in T, i \in S} \delta_S = 1, \text{ для каждого } i.$$

Theorem

Сбалансированная игра на n человек имеет непустое ядро.

Взгляд с другой стороны