

# Классификация операторов Роты-Бастера на матричных алгебрах

Зенькович А.Д., под руководством Перепечко А.Ю.

19 мая 2023 г.

## Определение

*Оператором Роты-Бакстера* называется линейный оператор  $R : A \rightarrow A$  на ассоциативной алгебре  $A$  над полем  $\mathbb{F}$ , который удовлетворяет соотношению отображением  $R : A \rightarrow A$ , который удовлетворяет соотношению

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + R(y)x) + \lambda R(xy)$$

## Определение

*Оператором Роты-Бакстера* называется линейный оператор  $R : A \rightarrow A$  на ассоциативной алгебре  $A$  над полем  $\mathbb{F}$ , который удовлетворяет соотношению отображением  $R : A \rightarrow A$ , который удовлетворяет соотношению

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + R(y)x) + \lambda R(xy)$$

Это уравнение изначально взялось из физики как связанное с классическими уравнениями Янга-Бакстера. Так же, они имеют множество других применений, например, взятие первообразной является оператором Роты-Бакстера на  $C(\mathbb{R})$

# Задача

Естественный вопрос — описание всех операторов Роты-Бакстера на классических алгебрах над  $\mathbb{C}$ .

Естественный вопрос — описание всех операторов Роты-Бакстера на классических алгебрах над  $\mathbb{C}$ .

## Известные результаты

На  $M_2(\mathbb{C})$  известны все операторы как нулевого, так и ненулевого веса [6, 2]

Над  $M_3(\mathbb{C})$  классифицированы все операторы ненулевого веса [4]

Над  $sl_2(\mathbb{C})$  и  $sl_3(\mathbb{C})$  аналогично [5]

Также есть результаты над другими алгебрами [3, 1]

# Задача

Описать алгебраически все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах  $M_2(\mathbb{C})$  и  $M_3(\mathbb{C})$ , а так же их орбиты под действием сопряжениями

# Задача

Описать алгебраически все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах  $M_2(\mathbb{C})$  и  $M_3(\mathbb{C})$ , а так же их орбиты под действием сопряжениями

Уравнения Роты-Бакстера веса 0 задают систему уравнений второй степени на коэффициенты оператора  $R$ , записанного в матричном виде. Так же если  $R$  является оператором Роты-Бакстера, то и для любого скаляра  $\lambda \in \mathbb{F}$   $\lambda R$  является оператором Роты-Бакстера.

# Задача

Описать все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах  $M_2(\mathbb{C})$  и  $M_3(\mathbb{C})$ .

Это значит, то совокупность операторов Роты-Бакстера веса 0 является *конусом некого проективного многообразия*.



Это многообразие состоит из 6 гладких компонент: 4 кривых рода 0 и двух поверхностей.

Компоненты разбиты на пары, которые переходят друг в друга при транспозиции.

Пересекаются только две поверхности по кривой рода 0, а остальные компоненты изолированы.

Пересечение поверхностей образует особенность этого многообразия.

Орбиты — открытые множества на поверхностях, особенная кривая и 4 изолированных кривых.



Huihui An and Chengming Bai.

From rota–baxter algebras to pre-lie algebras.

*Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(1):015201, dec 2007.



Pilar Benito, Vsevolod Gubarev, and Alexander Pozhidaev.

Rota–baxter operators on quadratic algebras.

*Mediterranean Journal of Mathematics*, 15(5):189, Aug 2018.



Chengyu Du, Chengming Bai, and Li Guo.

3-lie bialgebras and 3-lie classical yang–baxter equations in low dimensions.

*Linear and Multilinear Algebra*, 66(8):1633–1658, 2018.

 Maxim Goncharov and Vsevolod Gubarev.

Rota–baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three.

*Linear and Multilinear Algebra*, 70(6):1055–1080, 2022.

 Jun Pei, Chengming Bai, and Li Guo.

Rota–Baxter operators on  $sl(2, \mathbb{C})$  and solutions of the classical Yang–Baxter equation.

*Journal of Mathematical Physics*, 55(2), 02 2014.  
021701.

 Xiaomin Tang, Yang Zhang, and Qiong Sun.

Rota–baxter operators on 4-dimensional complex simple associative algebras.

*Applied Mathematics and Computation*, 229:173–186, 2014.