

Классификация операторов Роты-Бастера на матричных алгебрах

Зенькович А.Д., под руководством Перепечко А.Ю.

19 мая 2023 г.

Определение

Оператором Роты-Бакстера называется линейный оператор $R : A \rightarrow A$ на ассоциативной алгебре A над полем \mathbb{F} , который удовлетворяет соотношению отображением $R : A \rightarrow A$, который удовлетворяет соотношению

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + R(y)x) + \lambda R(xy)$$

Определение

Оператором Роты-Бакстера называется линейный оператор $R : A \rightarrow A$ на ассоциативной алгебре A над полем \mathbb{F} , который удовлетворяет соотношению отображением $R : A \rightarrow A$, который удовлетворяет соотношению

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + R(y)x) + \lambda R(xy)$$

Это уравнение изначально взялось из физики как связанное с классическими уравнениями Янга-Бакстера. Так же, они имеют множество других применений, например, взятие первообразной является оператором Роты-Бакстера на $C(\mathbb{R})$

Задача

Естественный вопрос — описание всех операторов Роты-Бакстера на классических алгебрах над \mathbb{C} .

Задача

Естественный вопрос — описание всех операторов Роты-Бакстера на классических алгебрах над \mathbb{C} .

Известные результаты

На $M_2(\mathbb{C})$ известны все операторы как нулевого, так и ненулевого веса [6, 2]

Над $M_3(\mathbb{C})$ классифицированы все операторы ненулевого веса [4]

Над $sl_2(\mathbb{C})$ и $sl_3(\mathbb{C})$ аналогично [5]

Также есть результаты над другими алгебрами [3, 1]

Задача

Описать алгебраически все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах $M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$, а так же их орбиты под действием сопряжениями

Задача

Описать алгебраически все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах $M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$, а так же их орбиты под действием сопряжениями

Уравнения Роты-Бакстера веса 0 задают систему уравнений второй степени на коэффициенты оператора R , записанного в матричном виде. Так же если R является оператором Роты-Бакстера, то и для любого скаляра $\lambda \in \mathbb{F}$ λR является оператором Роты-Бакстера.

Задача

Описать все возможные операторы Роты-Бакстера веса 0 на алгебрах $M_2(\mathbb{C})$ и $M_3(\mathbb{C})$.

Это значит, что совокупность операторов Роты-Бакстера веса 0 является конусом некого проективного многообразия.

Результаты

Это многообразие состоит из 6 гладких компонент: 4 кривых рода 0 и двух поверхностей.

Компоненты разбиты на пары, которые переходят друг в друга при транспозиции.

Пересекаются только две поверхности по кривой рода 0, а остальные компоненты изолированы.

Пересечение поверхностей образует особенность этого многообразия.

Орбиты — открытые множества на поверхностях, особенная кривая и 4 изолированных кривых.

Литература I

 Huihui An and Chengming Bai.
From rota–baxter algebras to pre–lie algebras.

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41(1):015201,
dec 2007.

 Pilar Benito, Vsevolod Gubarev, and Alexander Pozhidaev.
Rota–baxter operators on quadratic algebras.
Mediterranean Journal of Mathematics, 15(5):189, Aug 2018.

 Chengyu Du, Chengming Bai, and Li Guo.
3-lie bialgebras and 3-lie classical yang–baxter equations in low
dimensions.
Linear and Multilinear Algebra, 66(8):1633–1658, 2018.

Литература II

 Maxim Goncharov and Vsevolod Gubarev.

Rota–baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three.

Linear and Multilinear Algebra, 70(6):1055–1080, 2022.

 Jun Pei, Chengming Bai, and Li Guo.

Rota-Baxter operators on $sl(2, \mathbb{C})$ and solutions of the classical Yang-Baxter equation.

Journal of Mathematical Physics, 55(2), 02 2014.
021701.

 Xiaomin Tang, Yang Zhang, and Qiong Sun.

Rota–baxter operators on 4-dimensional complex simple associative algebras.

Applied Mathematics and Computation, 229:173–186, 2014.