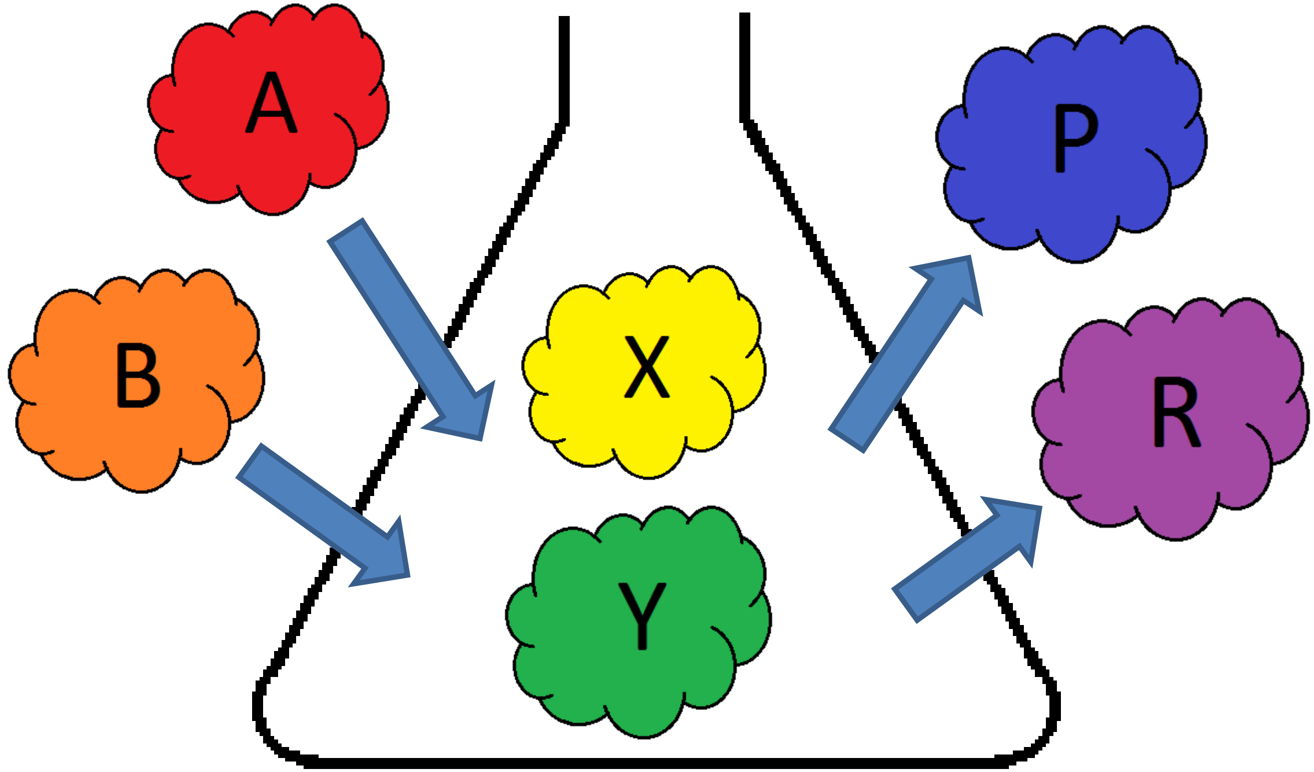
Исследование фазового портрета брюсселятора

А.С. Пономарев,
руководитель – А.О. Ремизов
Московский физико-технический институт

И.Р. Пригожин



Брюсселятор – простая математическая модель химической реакции класса Белоусова – Жаботинского. Предложена в 1968 году И.Р. Пригожиным и Р. Лефевром.

Брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) = a - (b+1)x + x^2 y \\ \dot{y} = g(x,y) = bx - x^2 y \end{cases}$$

$a > 0, b > 0$ – параметры

Единственная особая точка – $\mathrm{x} = \mathrm{a}$, $\mathrm{y} = \frac{b}{a}$.

Обозначим

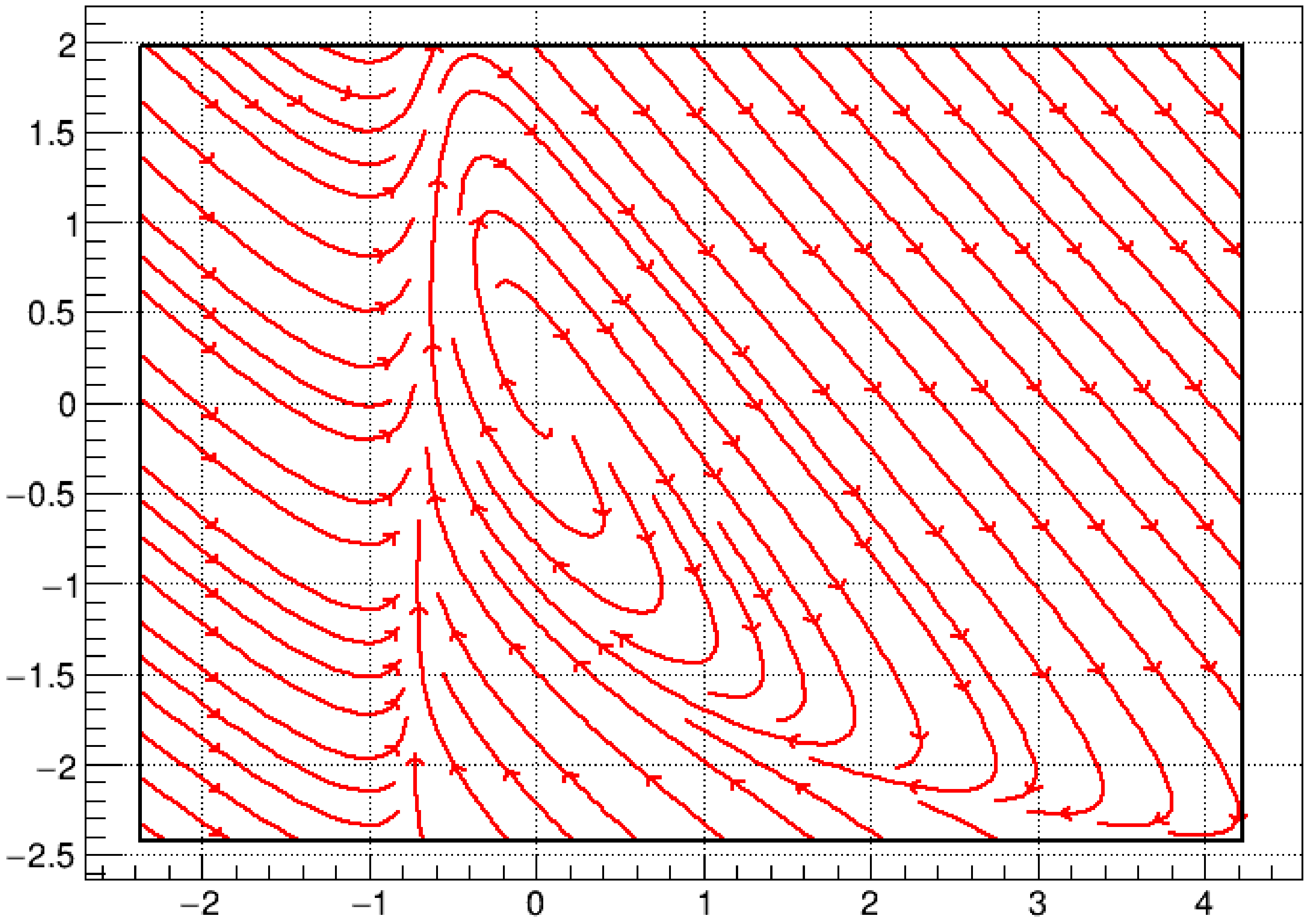
$P(a,b) = a^2 + 1 - b$,

$Q(a,b) = ((a+1)^2 - b)((a-1)^2 - b)$

Типы особой точки:

- $P > 0$, $Q \geq 0$ – устойчивый узел;
- $P > 0$, $Q \leq 0$ – устойчивый фокус;
- $P < 0$, $Q \geq 0$ – неустойчивый узел;
- $P < 0$, $Q \leq 0$ – неустойчивый фокус.
- $P = 0$ – трудный случай.

Брюсселятор



Если особая точка неустойчивая, существует и единственен предельный цикл. Выше график типичного частного случая $a = 1, b = 3$ с неустойчивым фокусом. Особая точка смещена в 0 заменой переменных.

Цель. Несложными средствами доказать единственность предельного цикла.

Критерий Дюлака. Пусть задано векторное поле $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, где P и Q имеют непрерывные частные производные по обеим переменным; $\mu(x,y)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция; G – область в R^2. Пусть дивергенция $D = \frac{d}{dx}(\mu \cdot P) + \frac{d}{dy}(\mu \cdot Q)$ не меняет знака в G (и не равна 0). Тогда:

1) если G односвязная, то в ней нет предельных циклов;
2) если G двусвязная (кольцевая), то в ней не более одного предельного цикла (!).

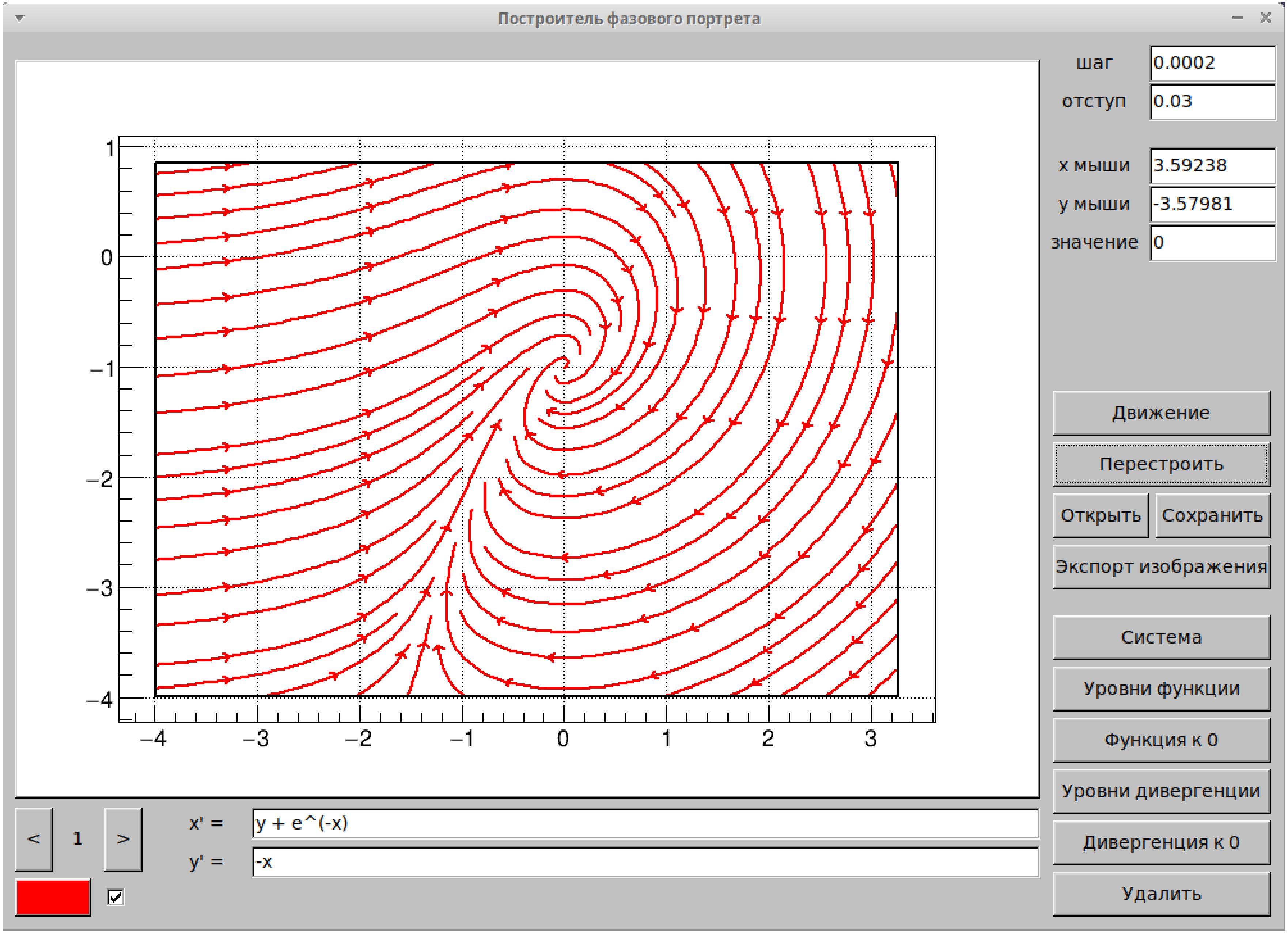
Вопрос единственности

Дана автономная система $\begin{cases}\dot{x} = P(x, y)\\ \dot{y} = Q(x, y)\end{cases}$, или, что эквивалентно, векторное поле $\begin{pmatrix}P(x,y)\\Q(x,y)\end{pmatrix}$, на R^2.

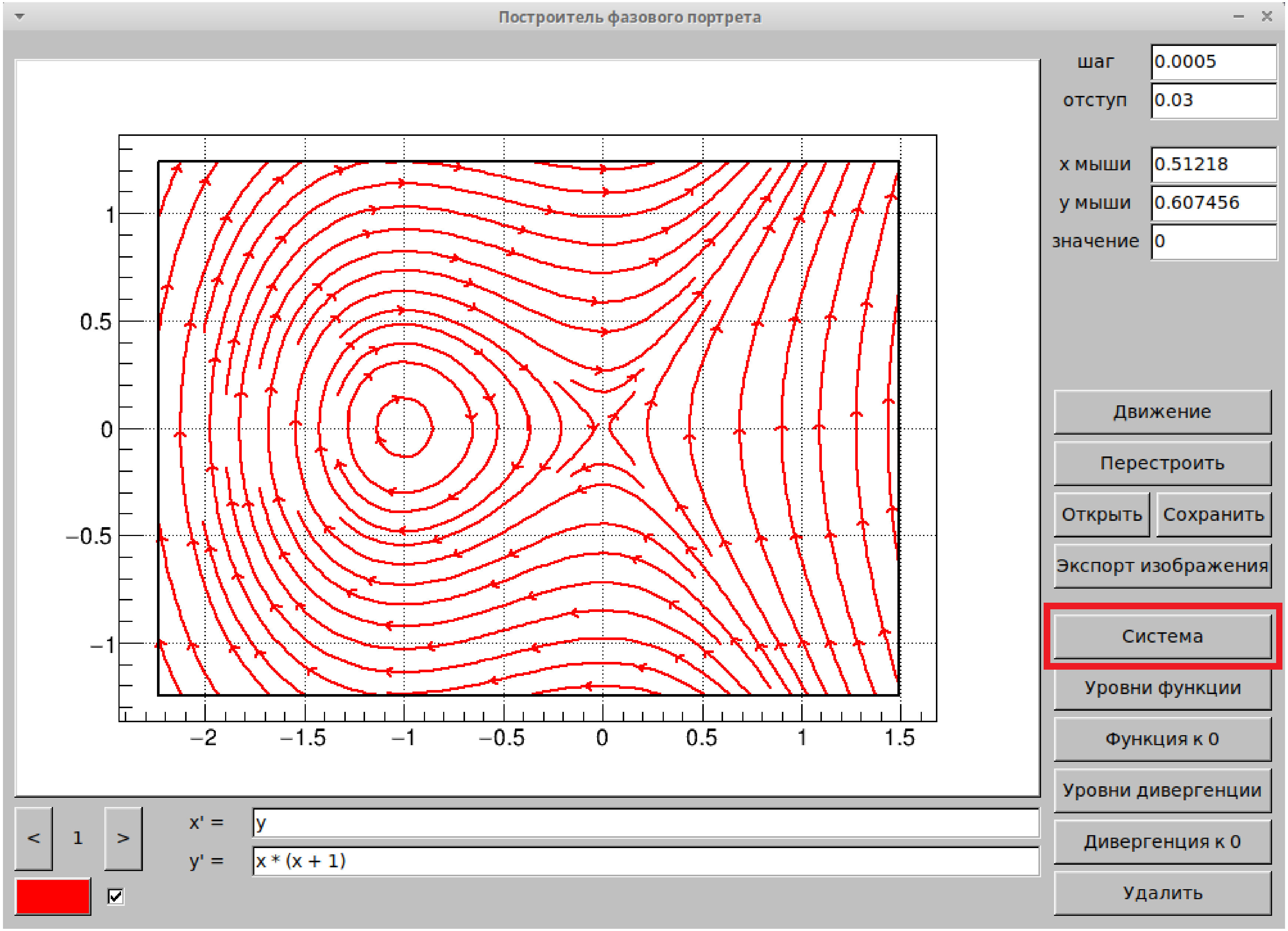
Требуется предъявить:

1) двусвязную (кольцевую) область $G \subset R^2$, содержащую предельный цикл;
2) непрерывно дифференцируемую в G функцию $\mu(x, y)$, такую что дивергенция D поля $\begin{pmatrix}\mu(x,y)\cdot P(x,y)\\ \mu(x,y)\cdot Q(x,y)\end{pmatrix}$ в G строго положительна либо строго отрицательна.

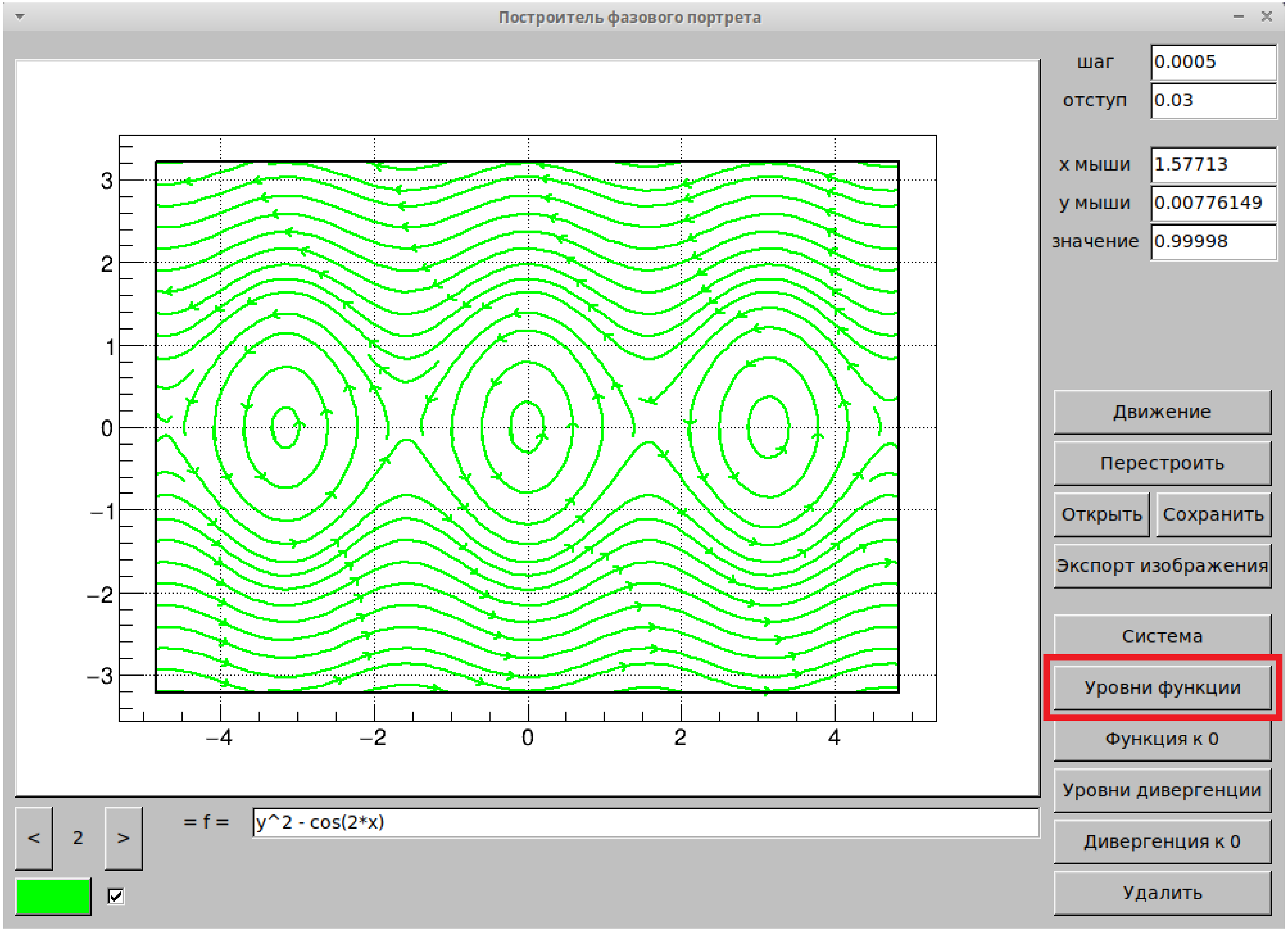
Вопрос единственности



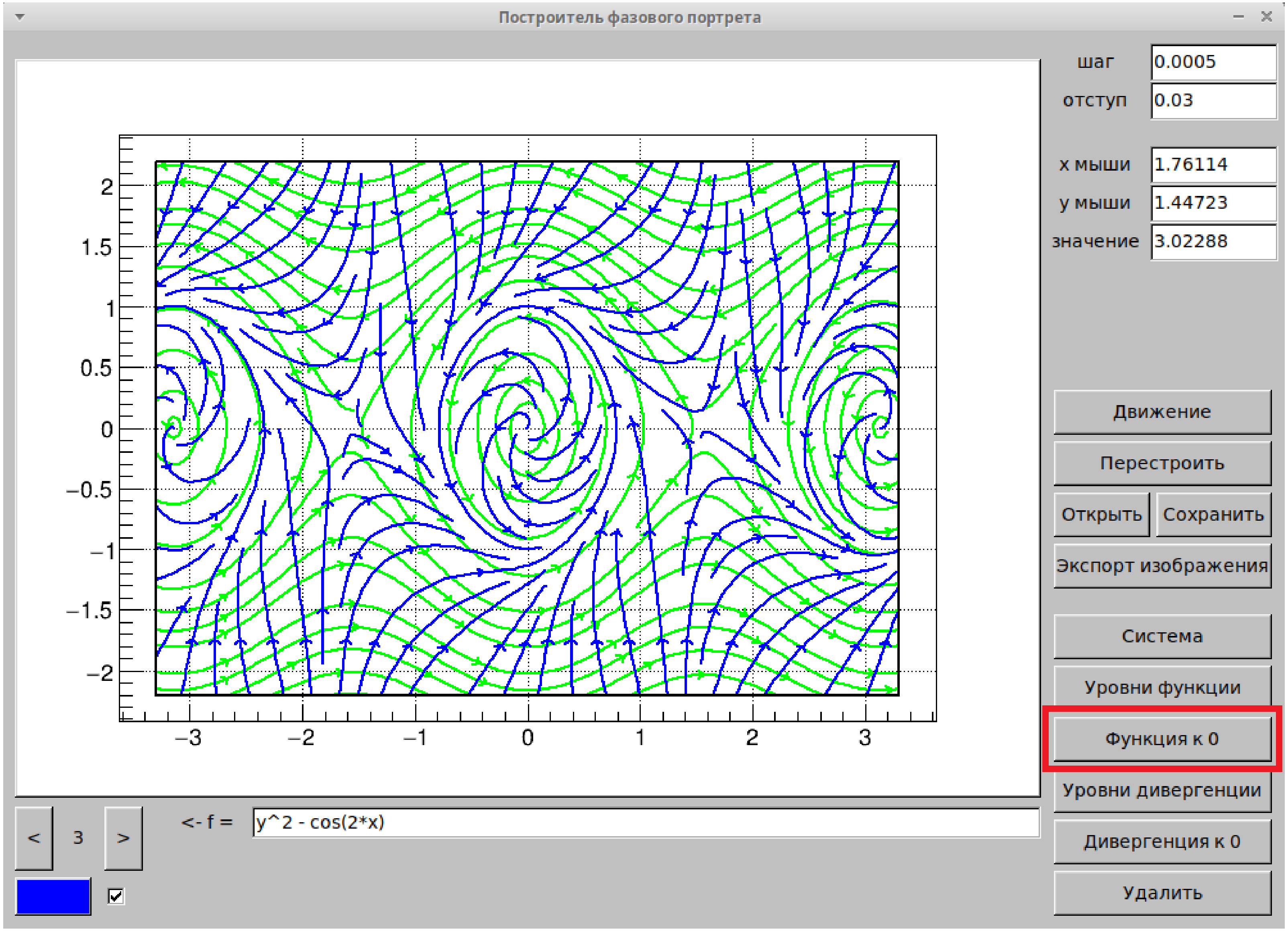
Интерфейс программы



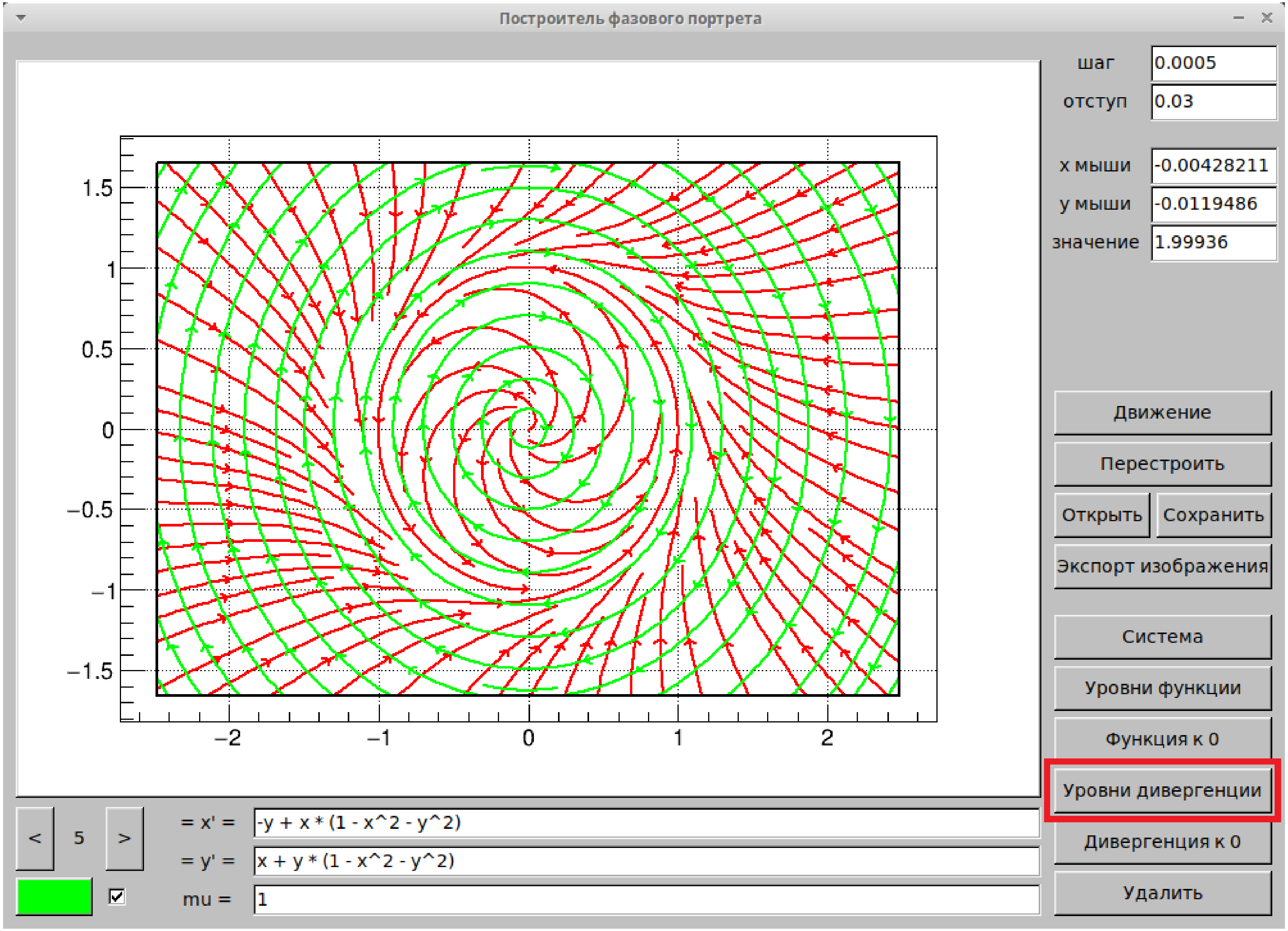
Чертится фазовый портрет заданной системы.



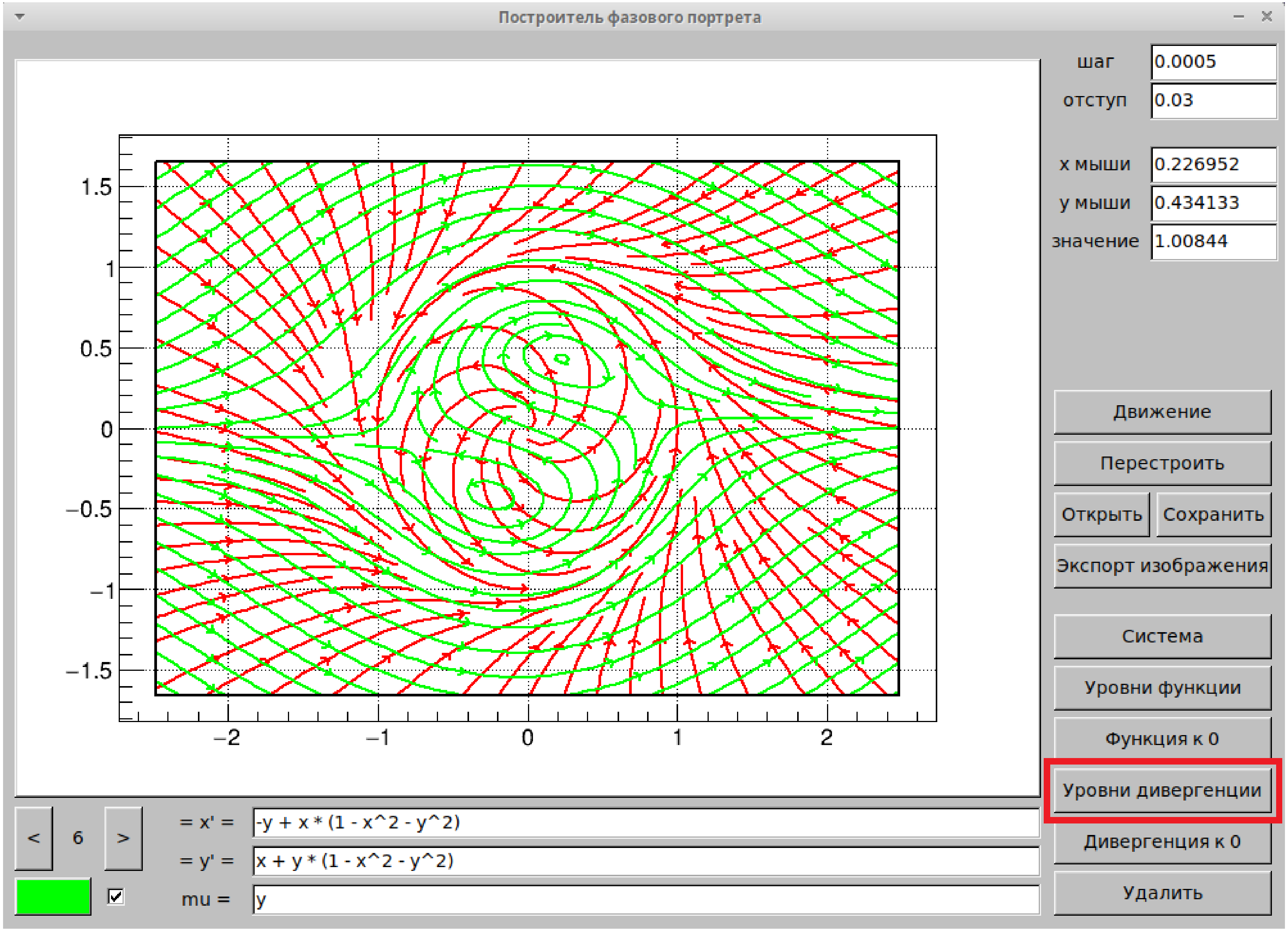
Чтобы получить линии уровня функции $\mathrm{F}(x, y)$, будем двигаться вдоль $R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \nabla F = \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}$.



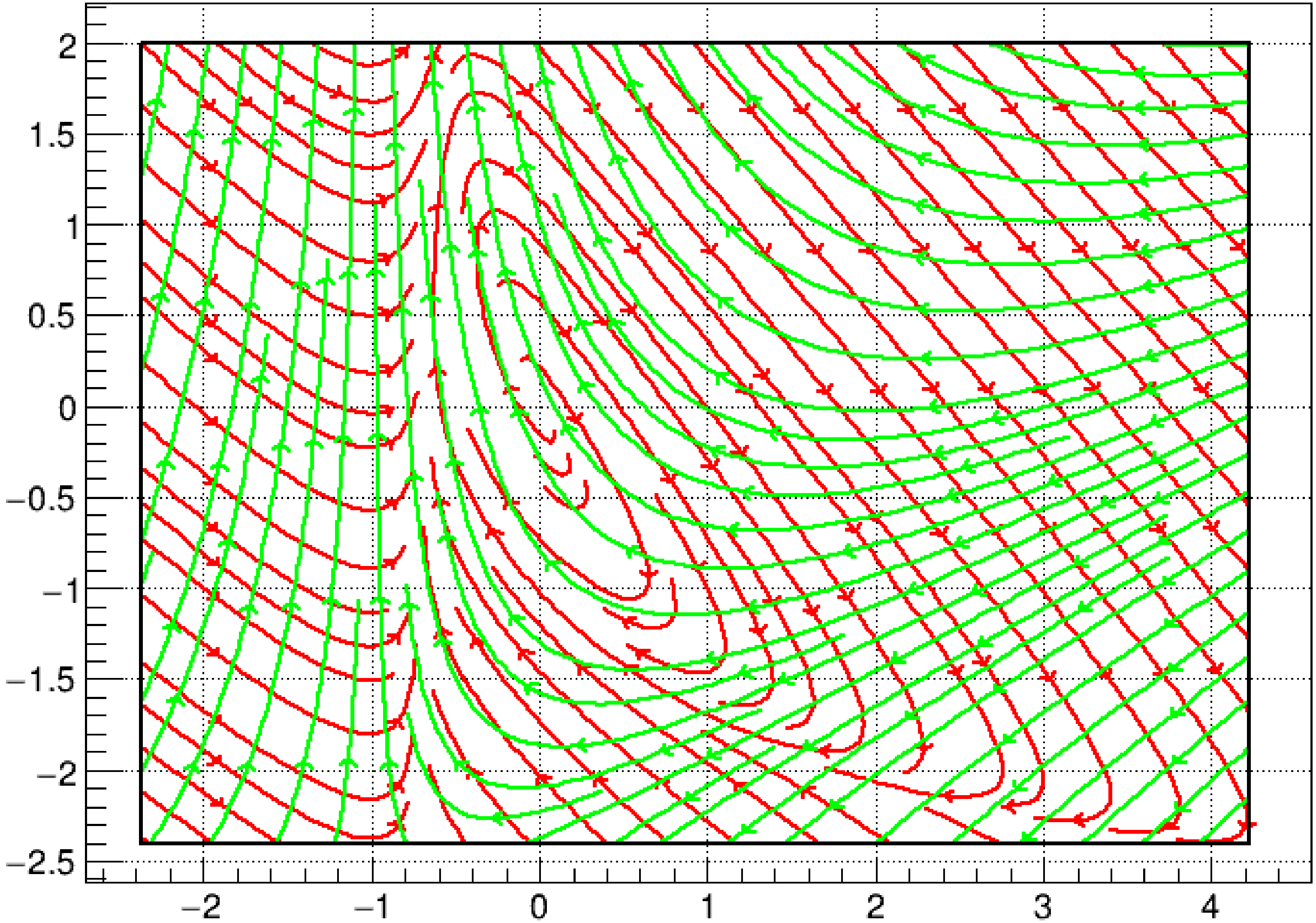
Чтобы приблизиться к нулевому уровню $\mathrm{F}(x, y)$, будем двигаться вдоль $R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \nabla F - F \cdot \nabla F = \begin{pmatrix} -F_y - F \cdot F_x \\ F_x - F \cdot F_y \end{pmatrix}$.



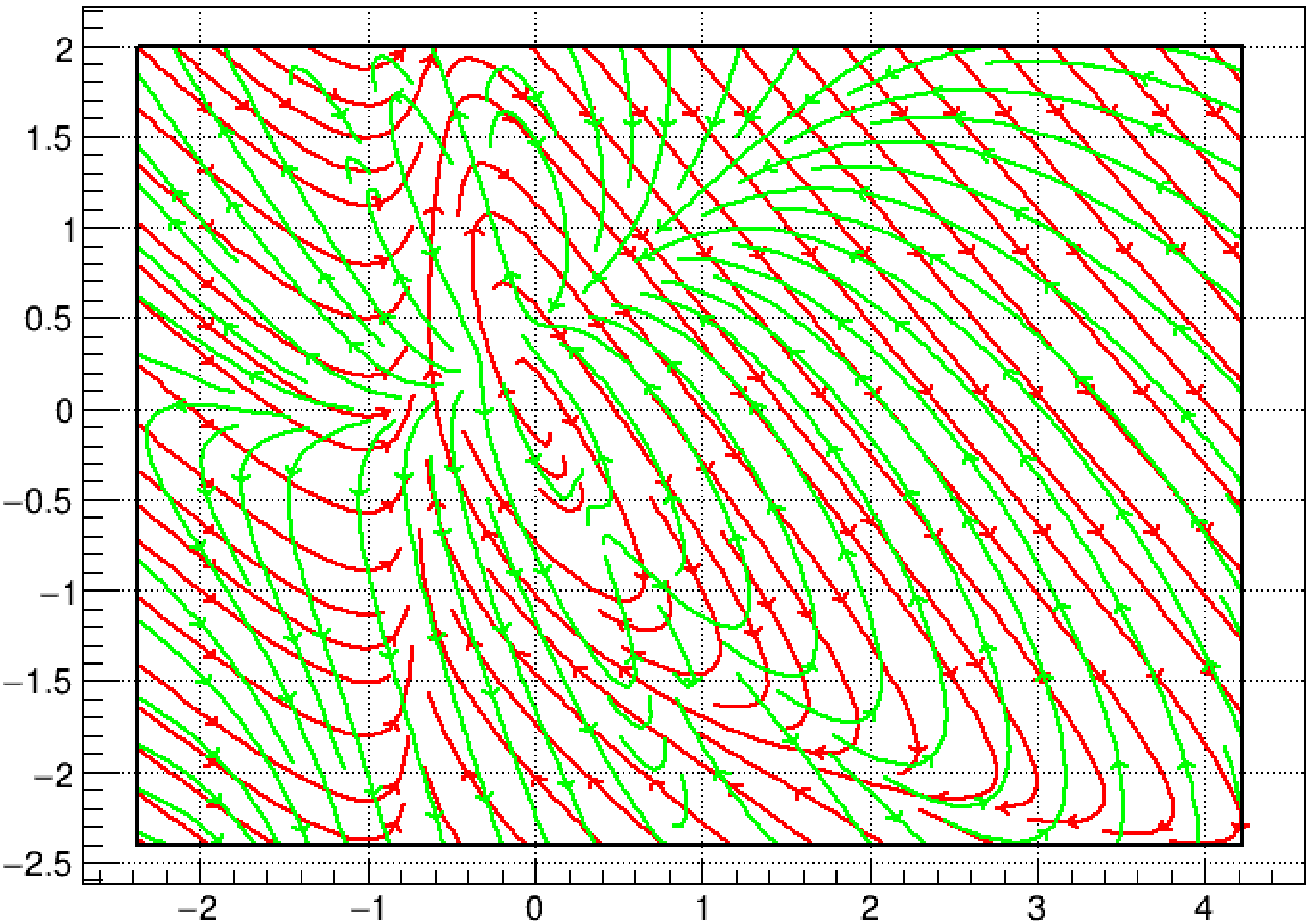
Чертятся линии уровня дивергенции заданной системы, домноженной на $\mu(x, y)$.



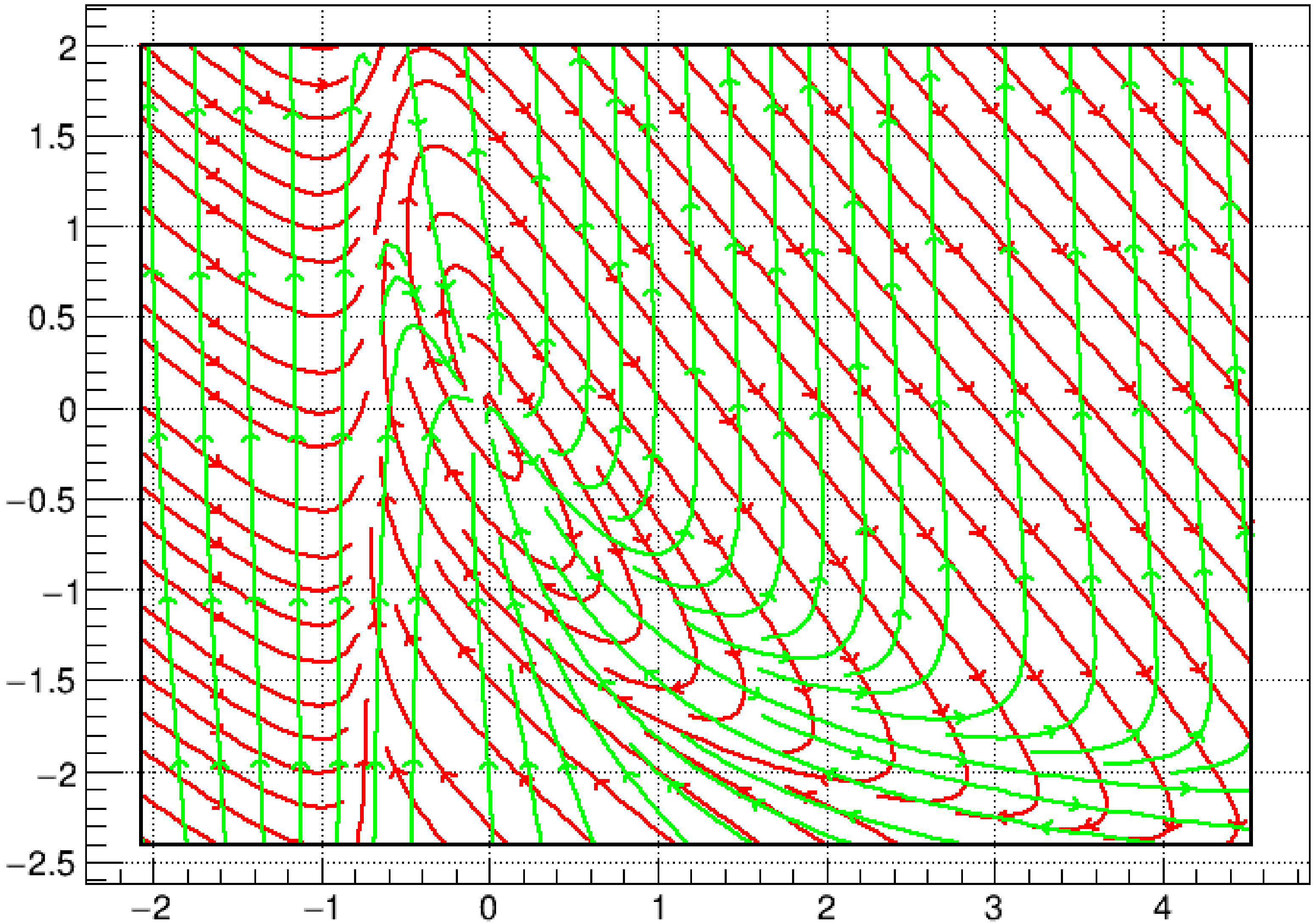
Чертятся линии уровня дивергенции заданной системы, домноженной на $\mu(x, y)$.



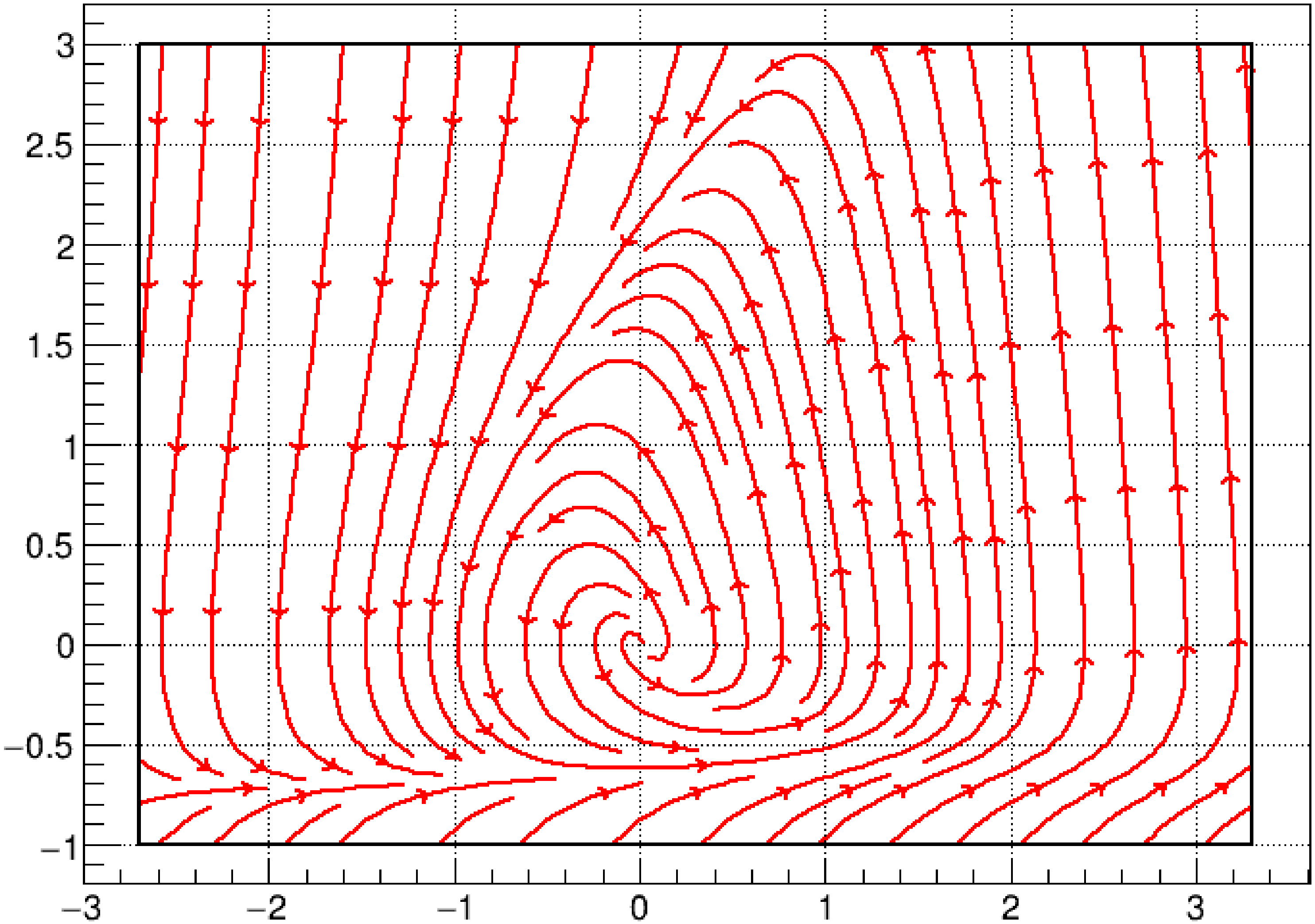
Брюсселятор $a = 1, b = 3$, особая точка которого передвинута заменой переменных в 0, и его дивергенция.



$$\mu = \frac{1}{(3x^2 + 3xy + y^2)^2}$$

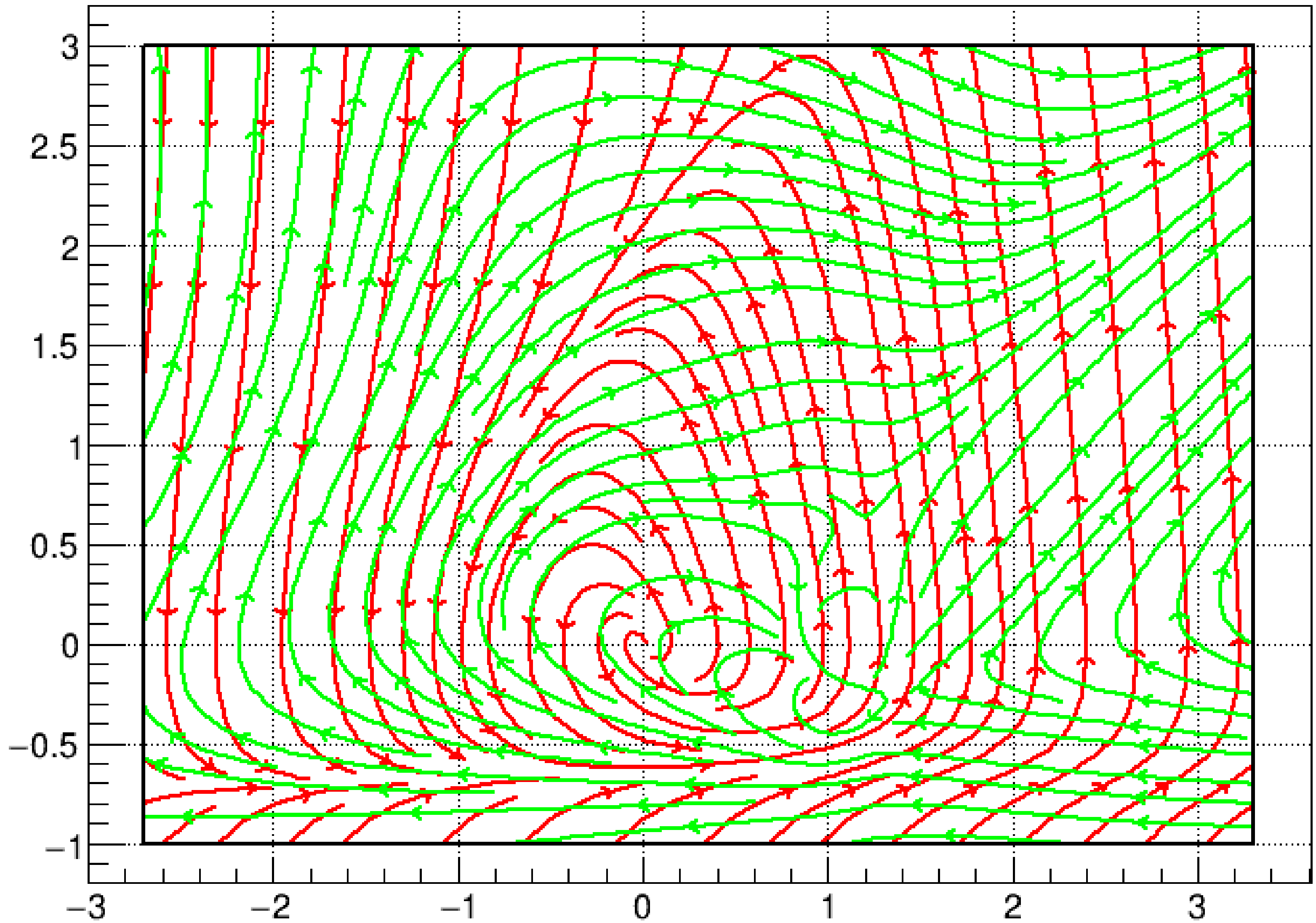


$$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y + \frac{3x}{x+1} = 0; \;\; \mu = \frac{-1}{y + \frac{3x}{x+1}}$$



Замена $x = x_{old} + y_{old},\ y = x_{old}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2y \end{cases}$$



Функция полярного угла:

$$\mu = 1{,}05 - (\sin\varphi_{(1{,}1;\,0{,}3)} - 0{,}3\cos\varphi_{(1{,}1;\,0{,}3)})$$

Идея

Распишем дивергенцию домноженной системы:

$$D^{(\mu)} = (\mu \cdot f)_x + (\mu \cdot g)_y = \mu_x f + \mu_y g + \mu D$$

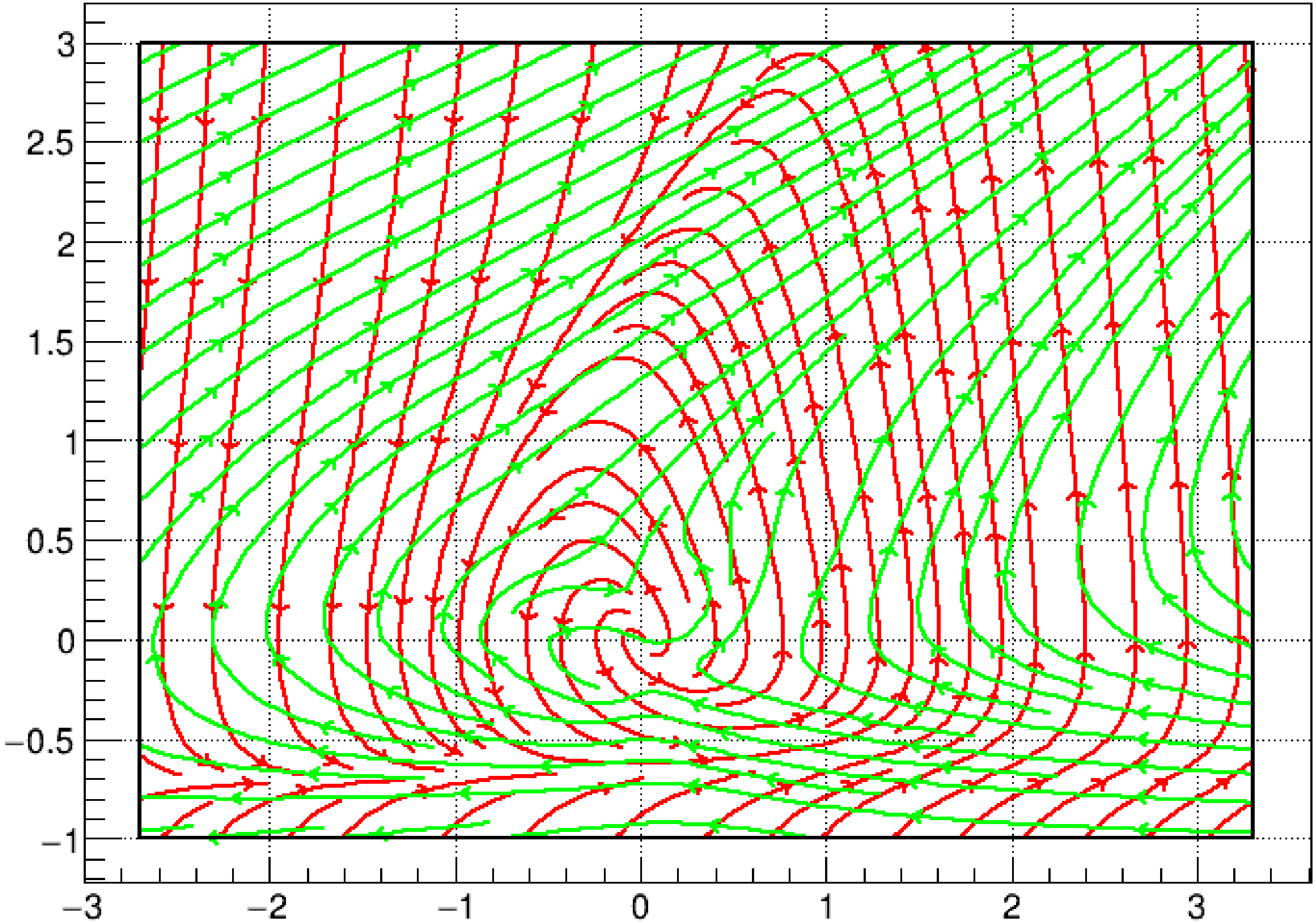
Пусть $\mu(x, y) = e^{\xi(x,y)}$. Требуем $D^{(\mu)} < 0.$

$$D^{(\mu)} = \xi_x e^{\xi} f + \xi_y e^{\xi} y + e^{\xi} D < 0$$

$$\xi_x f + \xi_y g + D < 0$$

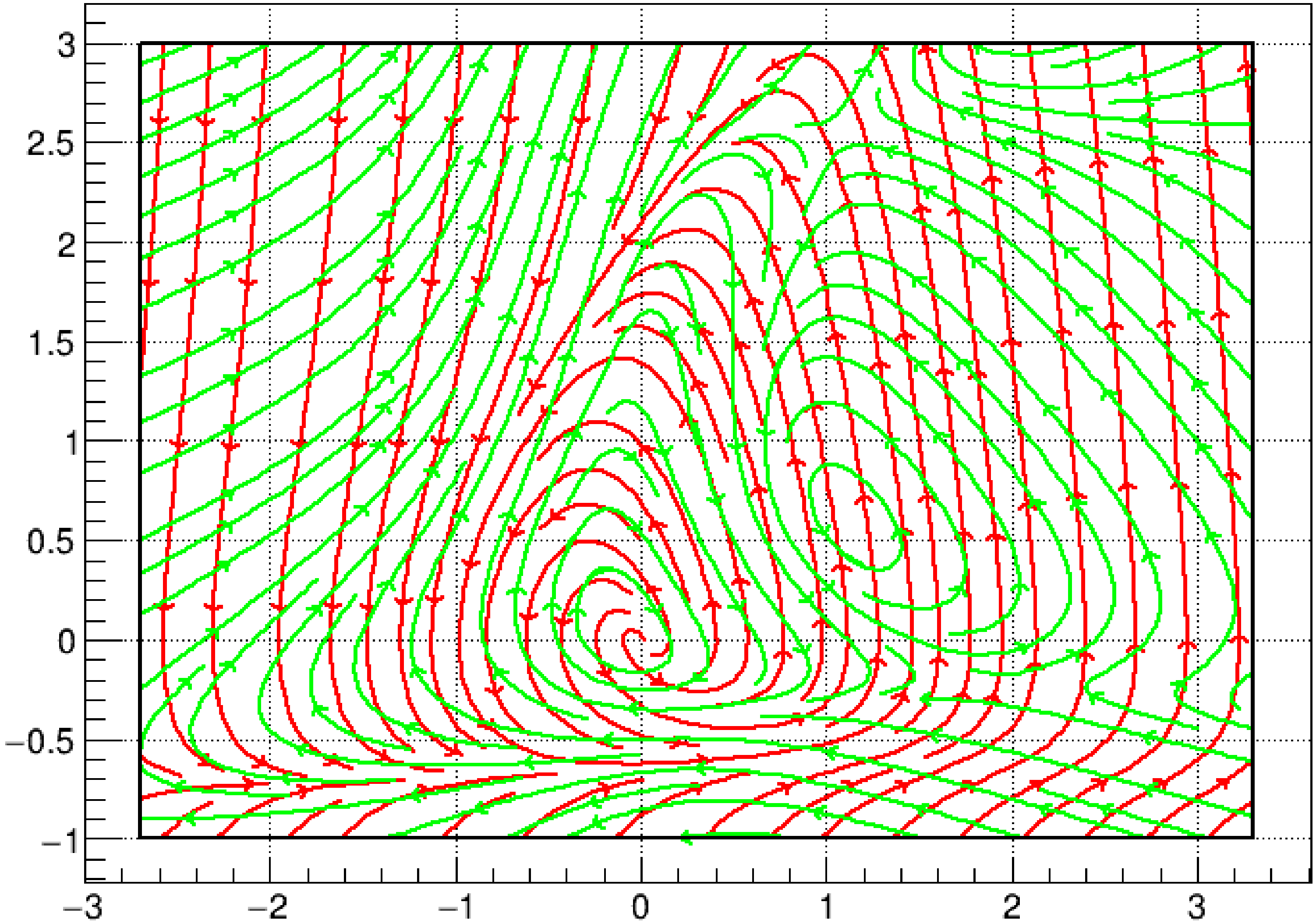
$$\left(\nabla\xi, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) + D < 0$$

Будем подбирать μ в виде e^{ξ}.



Функция полярного угла:

$$\mu = \exp\left(-10 \cdot \left(-\frac{\varphi}{\pi}\operatorname{th}(1) + \operatorname{th}\left(\frac{\varphi}{\pi}\right)\right)\right)$$



$$\mu = \exp\Big((-2x - 3y + 0{,}5 \cdot y^2) \cdot \sigma(x)\Big)$$

$$\sigma(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

Идея №1

$$\left(\nabla\xi, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\right) + D < 0$$

Формула вызывает желание воспользоваться средствами функционального анализа. Например, пусть $\mathcal{F}$ – евклидово пространство векторных полей на области G со скалярным произведением

$$(A, B) = \iint\limits_G (A(x, y), B(x, y))dxdy$$

Описанное уравнение решаем в подпространстве $\{\nabla\xi : \xi : G \longrightarrow \mathbb{R}\}, \xi$ непрерывно дифференцируемы.

Идея №2

Рассмотрим брюсселятор $a = 1, b = 3$, упрощенный линейными заменами переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2y \end{cases}$$

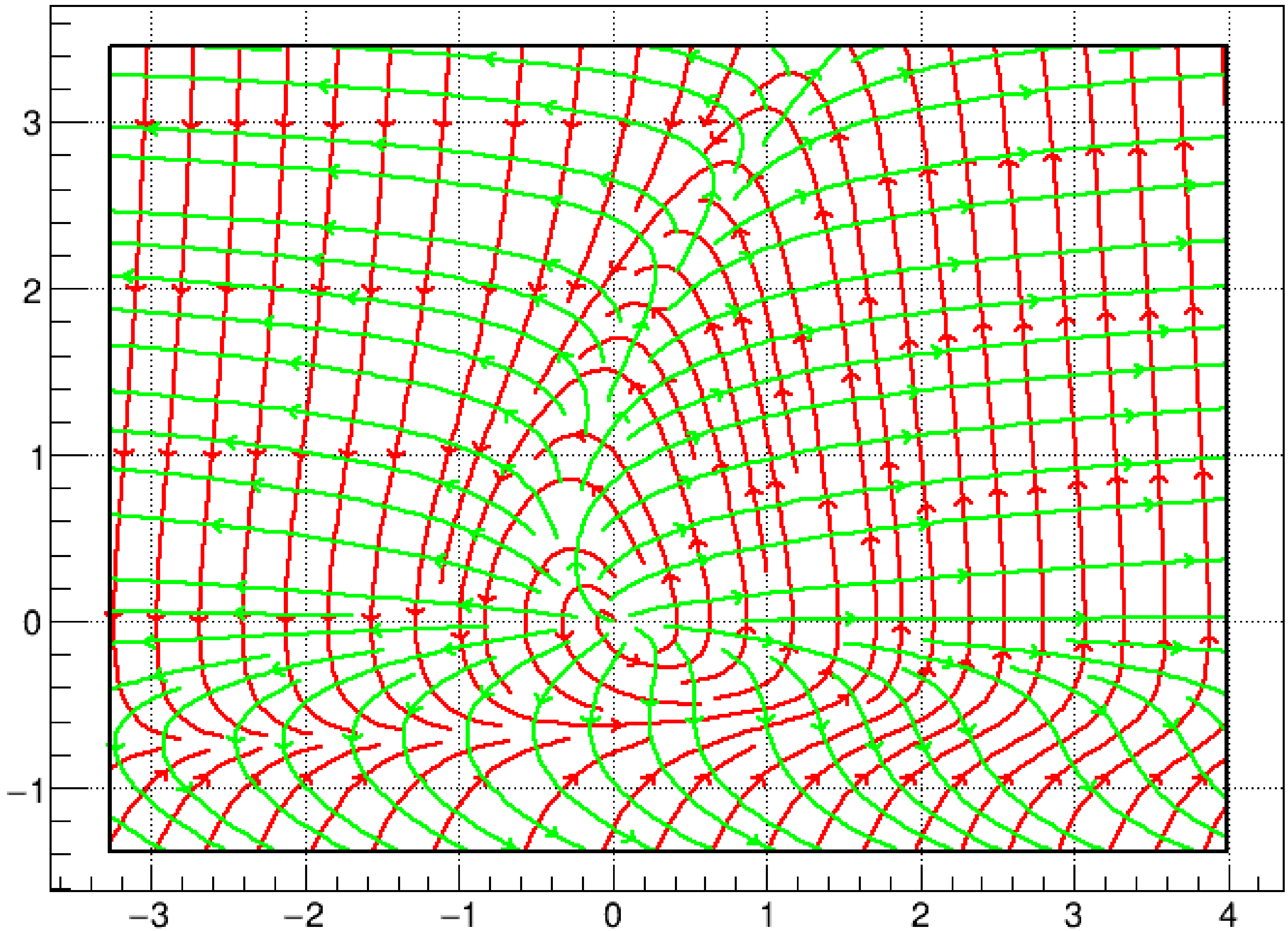
Перпендикулярное векторное поле задает следующая система:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Эта система решается явно!

$$\begin{cases} x = \left(\int\limits_{\pm\infty}^{\tau} \frac{1 + s - s^2}{s \cdot \exp\left(2s + \frac{s^2}{2}\right)} ds + A \right) \cdot \tau \cdot \exp\left(2s + \frac{s^2}{2}\right) \\ y = \tau \end{cases}$$

В свою очередь, $\tau = \pm e^t$ – замена времени.



$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + xy^2 - y^3 + y^2 + 2y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Идея №2

Из общего вида решения получим два первых интеграла перпендикулярной системы: один в строгой верхней полуплоскости, другой в строгой нижней соответственно.

$$I_{+}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{x}{y \cdot \exp\left(2y + \frac{y^2}{2}\right)} - \int_{+\infty}^{y} \frac{1 + s - s^2}{s \cdot \exp\left(2s + \frac{s^2}{2}\right)} ds$$

$$I_{-}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{x}{y \cdot \exp\left(2y + \frac{y^2}{2}\right)} - \int_{-\infty}^{y} \frac{1 + s - s^2}{s \cdot \exp\left(2s + \frac{s^2}{2}\right)} ds$$

Утверждение. Существуют две гладкие функции, определенные в верхней и в нижней полуплоскостях соответственно, такие что их градиент в любой точке сонаправлен вектору поля брюсселятора $a = 1,\ b = 3$.

Литература

1. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович, «Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости», М., «Наука», 1990.
2. Matthew P. McDowell, «Mathematical Modeling of the Brusselator», 2008.