Гомологии Хованова для виртуальных танглов

А.В. Мирошников, под руководством В.О. Мантурова

МФТИ, 23 мая 2023

Чем занимается теория узлов?

Узлом называется образ гладкого вложения окружности S^1 в $\mathbb{R}^2$.

Диаграммой узла называется вложенный четырехвалентный граф - погружение окружности S^1 в плоскость $\mathbb{R}^2$ - с дополнительной структурой прохода "выше/ниже"в каждой вершине. Так же диаграмму можно рассматривать как проекцию узла.

(a) (b) (c) (d)

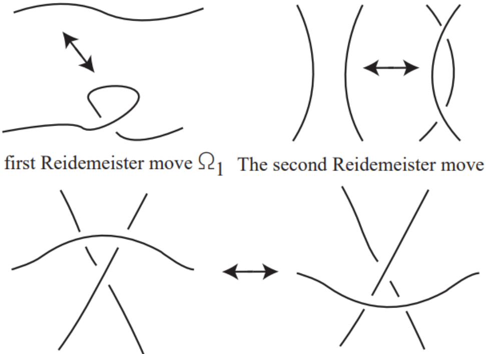
Чем занимается теория узлов?

Два узла K_1 и K_2 называются изотопными, если существует диффеоморфизм $\mathbb{R}^3$ на себя, сохраняющий ориентацию и переводящий K_1 в K_2.

Основной вопрос теории узлов - как по двум узлам понять, изотопны ли они.
Оказывается, намного проще сказать, когда они не изотопны, предъявив некий инвариант узла - свойство, не меняющееся при изотопии.

Движения Рейдемейстера

Два узла изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы получаются друг из друга конечной последовательностью движений Рейдемейстера (см. ниже).



The first Reidemeister move Ω_1 The second Reidemeister move Ω_2

The third Reidemeister move Ω_3

Зоопарк инвариантов

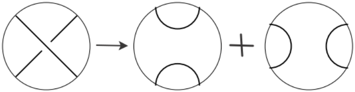
Краткий обзор стандартных инвариантов из теории узлов:

- Раскраски узла
- Скобка Кауфмана
- Полином Джонсона
- Фундаментальная группа узла
- Инварианты Васильева-Гусарова
- Гомологии Хованова

Каждый из инвариантов имеет свои сильные стороны и недостатки. Но только один инвариант из перечисленных способен распознать тривиальный узел - решать задачу из **NP** - гомологии Хованова!

Определение гомологий Хованова

Хованов построил свой знаменитый инвариант узла, как класс изоморфизмов некоторых цепных комплексов. Но его можно посчитать чисто комбинаторно. Перекрестки диаграммы узла разводятся по правилу ниже.



Образуются окружности. По их количеству строятся тензорные степени векторных пространств. Между ними рассматриваются следующие дифференциалы:

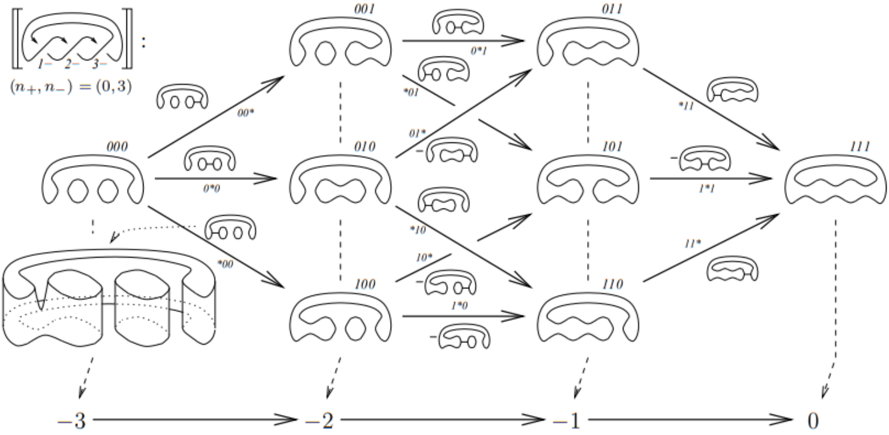
The map m:

$$\begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_-, v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+, \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_-, v_- \otimes v_- \mapsto 0 \end{cases}$$

The map Δ :

$$\begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_-. \end{cases}$$

Иллюстрация



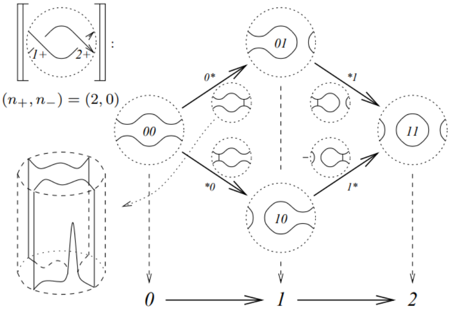
Определение тангла

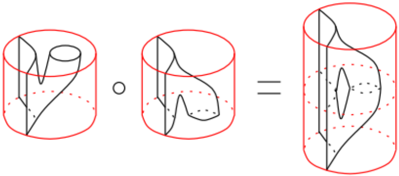
Диаграммой тангла называется граф в двумерном диске, вершины которого внутри него имеют валентность 4 и структуру “проход-переход”, а на границе - валентность 1.

Танглом называется класс эквивалентности диаграмм тангла по движениям Рейдемейстера. Тангл является обобщением кос и зацеплений.

Два тангла T_1 и T_2 с одинаковым краем B кобордантны, если существует двумерное многообразие в цилиндре, такое что его край лежит на границе цилиндра. Причем в нижнем и верхнем основаниях цилиндра - танглы T_1 и T_2, а на боковом основании - $B \times I$.

Определение тангла

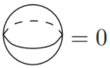


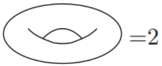


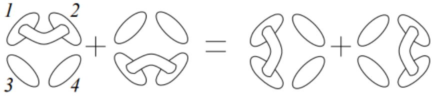
Что сделал Бар-Натан?

Бар-Натан рассмотрел категорию, где объекты - танглы, а морфизмы между ними - кобордизмы. Он делает из неё предаддитивную категорию (то есть такую, что в ней морфизмы имеют структуру абелевой группы), после чего накладывает на неё некоторые соотношения:

- S-соотношение.
- T-соотношение.
- $4TU$-соотношение.





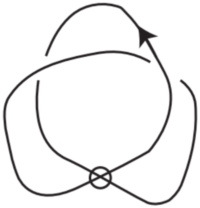


Полученная категория $Cob^3_{/l}(B)$ модифицируется до категории цепных комплексов $Kob_{/h}(B)$. Класс изоморфизмов $[T]$ в ней - инвариант тангла T.

Вирутальные узлы и танглы

Заметим, что диаграммы узлов и танглов планарны. Избавимся от этого препятствия.

Диаграммой виртуального узла/тангла называется диаграмма классического узла/тангла, где некоторые перекрестки являются погруженными.



Вопросы, которыми мы занимались

Как построить гомологии Хованова для виртуальных танглов?

Но перед этим необходимо решить комбинаторно-топологическую задачу: классифицировать классы эквивалентностей погруженных поверхностей по некоторым соотношениям.

Я расскажу о возможных инструментах и подходах к решению этой задачи.

Двумерные узлы

Двумерным узлом называется образ гладкого вложения сферы S^2 в $\mathbb{R}^4$

Диаграммой двумерного узла называется проекция двумерного узла в общем положении - погружение сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ - с дополнительной структурой прохода "выше/ниже"в каждом самопересечении.

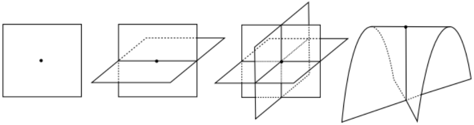


Fig. 4.1 Types of points of a 2-knot diagram

Двумерные узлы: теорема о классификации

Теорема Розмана, 1998

Две диаграммы двумерного узла представляют один и тот же двумерный узел тогда и только тогда, когда их диаграммы получаются друг из друга конечной последовательностью движений Розмана.

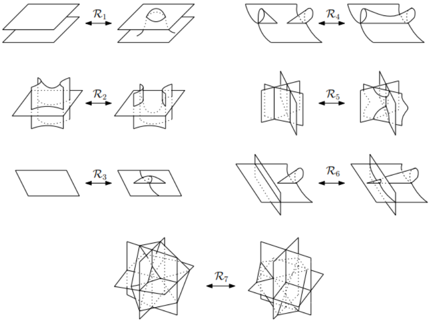
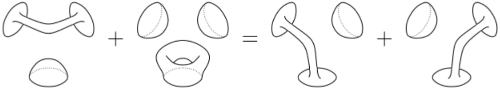


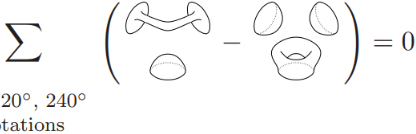
Fig. 4.2 Roseman moves

Другие соотношения, эквивалентные 4TU

$3S_1$:



$3S_2$:



Соотношение cutting necks:

Литература

- M Khovanov, A categorification of the Jones polynomial, Duke Math. J. 101 (2000) 359–426 MR1740682
- Khovanov's homology for tangles and cobordisms, Dror Bar-Natan
- Knot Theory. Second Edition, V.O. Manturovs
- Virtual Knots. The State of the Art, V.O. Manturov
- Invariants and Pictures, V.O. Manturov