УДК 519.154

ℓ_p-рамсеевские множества при нормальных раскрасках

Костина Е.А., Купавский А.Б.
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Пусть $\mathcal{M}$ - метрическое пространство, содержащее хотя бы 2 точки. Хроматическим числом $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{M})$ называется наименьшее число цветов, необходимое для покраски всех элементов $\mathbb{R}_p^n$ таким образом, чтобы не было одноцветных подпространств, изометричных $\mathcal{M}$. Метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется ℓ_p-рамсеевским, если $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{M}) \to \infty$ при $n \to \infty$. Случай $p = 2$ приводит к рассмотрению евклидовой теории Рамсея [1], в то время как $p = \infty$ порождает теорию Рамсея относительно max-нормы [2].

В данном докладе рассмотрены $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k)$ при $p \in 2\mathbb{N}$, где $\mathcal{B}_k$ - арифметическая прогрессия длины k. Обозначим элементы такой прогрессии через $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Будем считать, что разность прогресии равна единичному вектору. В то же время сузим класс рассматриваемых раскрасок. Нормальной назовём раскраски $\mathbb{R}_p^n$, полученные из раскраски $\mathbb{R}_+$ в соответствующее количество цветов и сопоставлением элементу $x \in \mathbb{R}_p^n$ цвета числа $||x||_p^p$. Хроматическое число относительно таких раскрасок будем обозначать $\chi_{norm}(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k)$

Пусть $x_i = ||v_i||_p^p \;\; \forall i = 1..k$. Из рассмотрения явных формул для значений x_i получено, что при $k > p$ существуют коэффициенты $c_i \in \mathbb{N}$ и константы $c \neq 0$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{p+1} c_i \, x_i = c$$

.

С помощью такой линейной комбинации получены явные нормальные раскраски $\mathbb{R}_p^n$ в константное число цветов, исключающие одноцветные изометрические копии $\mathcal{B}_k$.

Теорема 1. *Для $p \in 2\mathbb{N}$ и некоторой константе c $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_{p+1}) \leq c$ для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Для прогрессий меньшей длины такой линейной зависимости x_i нет. Более того, при больших размерностях n для многих наборов $x_1, \ldots, x_k$ существуют соответствующие арифметические прогрессии $v_1, \ldots, v_k$. Используя это наблюдение, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для $p \in 2\mathbb{N}$ и $k \leq p$ $\chi_{norm}(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Литература

[1] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems I, II, III

[2] N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, Max-norm Ramsey Theory