ℓ_p-рамсеевские множества при нормальных раскрасках

Е. Костина

2 мая 2023 г.

ℓ_p-рамсеевские множества

Пусть $\mathbb{X} = (X, \rho_X)$ и $\mathcal{Y} = (Y, \rho_Y)$ - метрические пространства. Подмножество $Y' \subset X$ назовём копией $\mathcal{Y}$, если Y и Y' изометричны. Тогда определим хроматическое число $\chi(\mathbb{X}, \mathcal{Y})$ как наименьшее число цветов, в которое необходимо покрасить все элементы $\mathcal{X}$, чтобы не было одноцветных копий $\mathcal{Y}$. Если $\mathcal{Y}$ нельзя изометрично вложить в $\mathbb{X}$, то можно считать, что $\chi(\mathbb{X}, \mathcal{Y}) = 1$.

Метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется ℓ_p-рамсеевским, если $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{M}) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Постановка задачи

Теперь хотим исследовать, что происходит при ℓ_p норме, $p \in \mathbb{N}, p \neq 2$. Сразу уточним, что будем рассматривать только *нормальные* раскраски, то есть цвет точки $v \in \mathbb{R}_p^n$ будет определяться цветом числа $||v||_p^p = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^p$ в какой-то фиксированной раскраске множества $\mathbb{R}_+$

Через $\mathcal{B}_k$ обозначим одномерное метрическиое пространство, соответствующее аримефтической прогресии длины k с разницей 1.

Результаты

Утверждение

Для чётных p:
если $k \leq p$, то $\chi_{norm}(\mathbb{R}_p^{k+1}, \mathcal{B}_k) = \infty$;
если $k > p$, то $\chi(\mathbb{R}_p^n, \mathcal{B}_k) < c$ при всех n для какой-то константы c.

Обозначим начальный вектор нашей прогресии через $v^{(1)} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, а разность прогрессии через $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Будем считать, что u - единичный вектор.

Не рамсеевские прогрессии

Введём следующие обозначения:
$s_0 = \sum u_i^p = 1$
$s_1 = \sum v_i u_i^{p-1}$
$\ldots$
$s_p = \sum v_i^p$

Тогда если p чётно, то $\forall i \; ||v + (i-1)u||^p = \sum (v_j + (i-1)u_j)^p$ - линейная комбинация $s_0, \ldots, s_p$.

Не рамсеевские прогрессии

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_p = x_1 \\ s_p + kps_{p-1} + \dots + k_i C_p^i s_{p-i} + \dots + k^p s_0 = x_k + 1, \quad k = 1..p \end{cases}$$

Из линейной зависимости строк получаем зависимость вида

$$c_1 x_1 + \dots c_p x_p = c_0$$

причём, $c_0 \neq 0$. Отсюда можем получить необходимую раскраску.

Пример при $p = 2$

Полученная зависимость будет иметь вид $2x_1 - x_0 - x_2 = 2$. Тогда красим $\mathbb{R}_+$ полуинтервалами длины 1 в 4 чередующихся цвета.

Случай маленьких прогрессий

Лемма

Для любого t существуют $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что $\forall i = 2..p\ \forall y_i \in [x_i - t, x_i + t]$ найдутся v и u, такие, что $||v||^p = x_1$, $||v + u||^p = y_2$, $\ldots ||v + (p-1)u = y_p$.

Случай маленьких прогрессий

Лемма

Для любого t существуют $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что $\forall i = 2..p \; \forall y_i \in [x_i - t, x_i + t]$ найдутся v и u, такие, что $||v||^p = x_1$, $||v+u||^p = y_2$, $\ldots ||v + (p-1)u = y_p$.

Заметим, что длина полученной последовательности (то есть $y_p - x_1$) будет ограничена числом $N(t)$. Кроме того, заметим, что если нашлась такая последовательность для $x_1(t)$, то найдётся последовательность с той же длиной $N(t)$ для любого $x_1 > x_1(t)$.

Случай маленьких прогрессий

Пусть нам дана раскраска $\mathbb{R}_+$ в k цветов. Тогда выберем $t_1, t_2, \dots t_{k+1}$ так, чтобы $t_i > N(t_{i-1})$.
Будем делать следующее: возьмём последовательность $x_1, \dots, x_p$ для t_{k+1}. Тогда на одном из отрезков $[x_i - t_{k+1}, x_i + t_{k+1}]$ не будет представлен какой-то из цветов. Возьмём его и применим к нему аналогичные рассуждения. В конце получим одноцветный отрезок и искомую прогрессию на нём.

Доказательство леммы

Лемма

Для любого t существуют $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что $\forall i = 2..p \; \forall y_i \in [x_i - t, x_i + t]$ найдутся v и u, такие, что $||v||^p = x_1$, $||v + u||^p = y_2$, $\ldots ||v + (p-1)u = y_p$.

Доказательство леммы

Лемма

Для любого t существуют $x_1, x_2, \ldots, x_p$ такие, что $\forall i = 2..p\ \forall y_i \in [x_i - t, x_i + t]$ найдутся v и u, такие, что $||v||^p = x_1$, $||v + u||^p = y_2$, $\ldots ||v + (p-1)u = y_p$.

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_p = x_1 \\ s_p + kps_{p-1} + \cdots + k_i C_p^i s_{p-i} + \cdots + k^p s_0 = y_k + 1, \quad k = 1..p-1 \end{cases}$$

СЛУ имеет единственное решение, в котором s_i выражаются в качестве линейной комбинации от $1, x_1, y_k$.

Доказательство леммы

Таким образом, достаточно решить систему

$$\begin{cases} u_1^p + \dots + u_p^p = 1 \\ v_1^p + \dots + v_p^p = a_1 \\ v_1^{p-1} u_1 + \dots + v_p^{p-1} u_p = a_2 + \varepsilon_2 \\ \dots \\ v_1 u_1^{p-1} + \dots + v_p u_p^{p-1} = a_p + \varepsilon_p \end{cases}$$

где $\varepsilon_i \in [-t', t']$.

Доказательство леммы

Таким образом, достаточно решить систему

$$\begin{cases} u_1^p + \dots + u_p^p = 1 \\ v_1^p + \dots + v_p^p = a_1 \\ v_1^{p-1} u_1 + \dots + v_p^{p-1} u_p = a_2 + \varepsilon_2 \\ \dots \\ v_1 u_1^{p-1} + \dots + v_p u_p^{p-1} = a_p + \varepsilon_p \end{cases}$$

где $\varepsilon_i \in [-t', t']$.

Пусть система имеет решение для какого-то t_0. Тогда домножая v на $k > 1$ получаем решение для произвольного t.
Решение для какого-то t_0 получается по теореме об обратной функции для $u_1, \dots, u_p$ при фиксированном $v = (r, r, \dots, r)$.

Список литературы

[1] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems I, II, III
[2] I. Leader, P.A. Russell, M. Walters, Transitive sets in Euclidean Ramsey theory
[3] A. Kupavskii, A. Sagdeev, All finite sets are Ramsey in the maximum norm
[4] N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, Max-norm Ramsey Theory