Задачи типа теоремы Лебега отображения в граф

Колесников Н.С. Карасев Р.Н.

МФТИ, ФПМИ

16.05.2023

Definition

Если $\Gamma = \{U_\lambda\}_\Lambda$ – покрытие топологического пространства X, то кратностью покрытия Γ называется такое наименьшее число d, что любая точка X покрыта не более чем d множествами.

Эта характеристика позволяет наивно-комбинаторно определить размерность.

Definition

Лебеговская размерность X – наименьшее целое число n, что во всякое локально конечное покрытие X можно вписать покрытие кратности $n+1$.

И эта размерность совпадает с классическими размерностями. Например в случае размерности многообразия или CW-комплекса. См [Але73], также [Kar14].

Такое понимание размерности мотивирует вопрос о том, насколько хорошо пространство можно приблизить пространствами размерности $\leqslant d$:

Definition (Uryson width)

d-тым поперечником Урысона метрического пространства X называется величина

$$\mathrm{UW}_d(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{\{U_i\}_n, \text{кратность} \leqslant d+1} \sup_{i=1..n} \operatorname{diam} U_n.$$

Нахождение некоторых значений UW_d можно найти в [TT71].

Theorem (Лебег-Брауэр)

Если n-мерный куб $\square^n$ покрыт конечным числом открытых (замкнутых) множеств, то выполняется хотя бы одно условие:

- *Найдется такое множество покрытие, задевающее противоположные гиперграни.*
- *Степень покрытия $\geqslant n + 1$.*

И отсюда несложно показать, что $\mathrm{UW}_{n-1}(\square^n) = 1$.

Задача

Значения d-ого поперечника Урысона для куба $\square^n$:

$n \backslash d$	0	1	2	3	4	$\dots$	d
1	$\sqrt{1}$	0	0	0	0	$\dots$	0
2	$\sqrt{2}$	1	0	0	0	$\dots$	0
3	$\sqrt{3}$	?	1	0	0	$\dots$	0
4	$\sqrt{4}$	?	?	1	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$\sqrt{n}$	?	?	?	?	$\dots$	?

Естественная гипотеза предложенная Алексеем Балицким в [Bal21]: $\mathrm{UW}_d(\square^n) = \sqrt{n-d}$. Однако, насколько известно, доказательства этого факта пока что нет.

Можно пытаться решить эту задачу для второго столбца, то есть искать $\mathrm{UW}_1(\square^n)$.

Lemma

Пусть Σ *– конечное открытое покрытие степени* d *паракомпактного пространства* X*. Тогда рассмотрев подчиненное* Σ *разбиение единицы* $\rho = (\rho_1, \rho_2, ...\rho_n)$*, мы получаем отображение* $\rho : X \to \triangle^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$*. Если точка* x *покрывалась* k *множествами, то* $\rho(x)$ *будет лежать в соотствующем подсимпликсе размерности* $k-1$*. И задачу частично можно сводить к симплициальным множествам.*

В частности, в случае $\mathrm{UW}_1(\square^n)$ мы получаем отображение $\rho : \square^n \to G$, где G – некоторый граф.

Theorem

Для любого непрерывного отображения из $\square^3$ *в граф найдутся противоположные ребра, образы которых пересекаются в графе.*

Преобразование задачи

- Перейдя к универсальному накрытию графа, можно заменить произвольный граф на дерево.
- Равносильное условие: найдутся два противоположных ребра, образы которых пересекаются в дереве.
- Так как дерево стягиваемое можно ограничиться только 1-остовом куба.

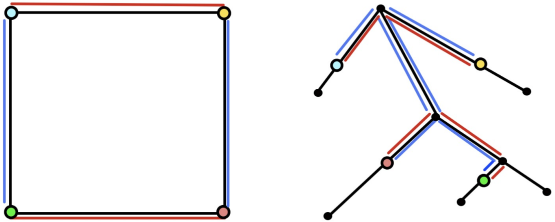

Рис.: Типичная картинка

- Можно считать, что вершины куба переходят в вершины дерева.
- Можно считать, что ребро переходит кратчайший путь между образами вершин.
- Можно считать, что в графе нет вершин степени два.
- Можно считать, что висячие вершины – образы вершин куба.

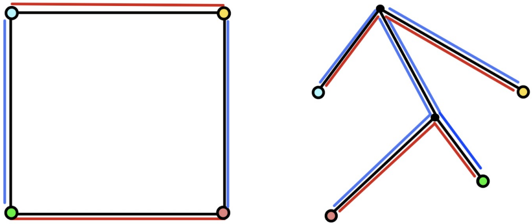

Рис.: После преобразований

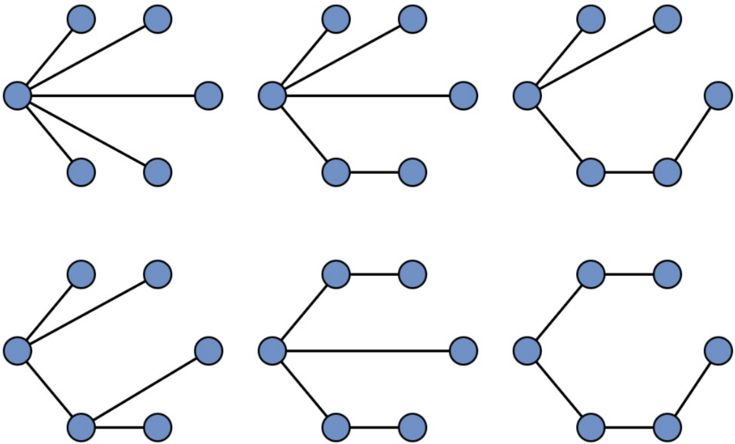

Рис.: Неизоморфные графы на 6 вершинах

Итоги

- Теорема в случае отображения из $\square^3$ верна.
- Для случая $\square^4$ комбинаторная структура становится сложнее и похожего доказательства нет.
- $\mathrm{UW}_1(\square^3) \geqslant \sqrt{2}$ (На самом деле здесь равенство).

[TT71] V. M. Tikhomirov и L. A. Tumarkin. “О поперечниках Урысона n-мерной Эвклидовой сферы”. В: (1971). URL: http://dml.cz/dmlcz/700803.

[Але73] Пасынков Б.А. Александров П.С. *Введение в теорию размерности*. 1973.

[Kar14] Roman N. Karasev. “Covering dimension using toric varieties”. В: *Topology and its Applications* 177 (нояб. 2014), с. 59—65. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.006. URL: https://doi.org/10.1016%2Fj.topol.2014.08.006.

[Bal21] Alexey Balitskiy. “Bounds on Urysohn width”. 2021. URL: https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/139312.