УДК 514.17

Задачи типа теоремы Лебега отображения в граф

***Н.С. Колесников*[1], *Р.Н. Карасев*[1]**

[1]Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

Известная теорема топологической комбинаторики утверждает, что если замкнутый квадрат покрыт конечным числом открытых множеств то выполняется хотя бы одно условие: или какая-то точка куба лежит хотя бы в трех открытых (покрытие имеет кратность 3), или есть открытое, пересекающее какие-то два противоположных ребра квадрата. Эта теорема может быть переформулирована в терминах непрерывных отображений с помощью перехода к нерву покрытия: для любого отображения квадрата в граф (одномерный CW-комплекс) найдется такая точка в графе, прообраз которой пересекается одновременно с противоположными ребрами квадрата. В данной работе мы концентрируемся на аналогичном утверждении, заменяя квадрат (двумерный куб) на куб размерности три.

Воспользовавшись односвязностью куба можно перейти к универсальному накрытию графа и ограничиваться только отображениями из куба (произвольной размерности) в деревья (связные, односвязные CW-комплексы). Теперь легко видеть, достаточно оставить лишь стандартный 1-остов куба и рассматривать отображения из него. Утверждение теоремы равносильно тому, что найдутся два противоположных ребра образы которых имеют непустое пересечение в графе.

В работе показывается возможность следующих урощений:

1. Можно считать, что носителями путей-ребер являются кратчайшие в смысле графа пути.
2. Можно рассматривать только деревья в которых нет вершин степени 2.
3. Можно считать, что в графе 2^n вершин (в случае куба – 8) и все вершины 1-остова куба отображаются в висячие вершины

Данные ограничения существенно упрощают конструкцию, сводя задачу отображений трехмерного куба в граф к нескольким простым случаям, которые рассматриваются в работе.

В качестве приложения мы получим нижнюю оценку на первый поперечник Урысона куба.

Литература

1. Balitskiy, A. (2021). *Bounds on Urysohn width* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
2. Tikhomirov, V. M., Tumarkin, L. A. (1971). *The Uryson diameters of the Euclidean n-sphere* (General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra)