

МОДЕЛЬ РАМСЕЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРИМЕРЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ МОНГОЛИИ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ.

Н. А. Моисеев¹

¹Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

e-mail: ¹moiseev.na@phystech.edu

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Н. Н. Оленёв,
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Рассмотрена общая постановка математической модели Рамсея экономики страны [1], общий алгоритм её идентификации и приведён пример её применения к экономике Монголии.

Производственная функция описывается так:

$$Y(t) := Y_0 \cdot \left[\alpha \cdot \left(\frac{L(t)}{L_0} \right)^{-b} + (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{K(t)}{K_0} \right)^{-b} \right]^{-\frac{1}{b}} \quad (1)$$

где Y — ВВП в постоянных ценах, $Y_0 = Y(t_0)$ — ВВП в начальный момент времени в постоянных ценах, L — количество занятых в экономике людей, $L_0 = L(t_0)$ — количество занятых в экономике людей в начальный момент времени, K — капитал в постоянных ценах, $K_0 = K(t_0)$ — капитал в начальный момент времени в постоянных ценах, t — время (год), t_0 — начальный момент времени, $a \in (0; 1)$, $b \in (-1; 3)$, $\alpha \in (0; 3)$ — параметры модели.

$$\frac{dL}{dt}(t) = \gamma \cdot L(t), \quad L(t_0) = L_0, \quad \frac{dK}{dt}(t) = J(t) - \mu \cdot K(t), \quad K(t_0) = K_0 \quad (2)$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in (-0.2; 0.2)$ — параметры модели, J — инвестиции в основной капитал в постоянных ценах.

Капитал и ВВП в начальный момент времени в постоянных ценах соотносятся так: $\alpha = \frac{Y_0}{K_0}$.

Предполагается, что в каждый момент времени выполнено равенство:

$$p_Y(t) \cdot Y_{current}(t) + p_I(t) \cdot I_{current}(t) = p_C(t) \cdot C_{current}(t) + p_J(t) \cdot J_{current}(t) + p_E(t) \cdot E_{current}(t) \quad (3)$$

где $J_{current}$ — инвестиции, $I_{current}$ — импорт, $E_{current}$ — экспорт, $C_{current}$ — расходы конечного потребления в текущих ценах, p_Y — дефлятор ВВП, p_I, p_E, p_C, p_J — индексы цен на импорт, экспорт, конечное потребление и инвестиции соответственно, вычисляемые по формулам:

$$p_X(t) := \frac{X_{current}(t)}{X(t)}, \quad X \in \{Y, I, J, E, C\} \quad (4)$$

где I — импорт, E — экспорт, C — расходы на конечное потребление в постоянных ценах.

$$Q(t) := \frac{p_C(t) \cdot C(t)}{p_Y(t)}, \quad \pi_X(t) := \frac{p_X(t)}{p_Y(t)}, X \in \{I, E, C, J\} \quad (5)$$

Q — балансирующая величина конечного потребления домашних хозяйств и правительственных организаций, π_X — относительные индексы цен. Уравнение (3) приводится к виду:

$$Y(t) + \pi_I(t) \cdot I(t) = Q(t) + \pi_E(t) \cdot E(t) + \pi_J(t) \cdot J(t) \quad (6)$$

$$\sigma(t) := \frac{\pi_J(t) \cdot J(t)}{Y(t) + \pi_I(t) \cdot I(t)}, \delta(t) := \frac{\pi_E(t) \cdot E(t)}{Y(t)}, \rho(t) := \frac{\pi_I(t) \cdot I(t)}{Y(t) - \pi_E(t) \cdot E(t)} \quad (7)$$

$$\beta(t) := \sigma(t) \cdot (1 + \rho(t) \cdot (1 - \delta(t))) \quad (8)$$

$$l(t) := \frac{L(t)}{L_0} \quad \forall t, k(t_0) = 1, y(t_0) = 1, \quad k(t+1) := (1 - \mu) \cdot k(t) + \frac{\alpha \cdot \beta(t) \cdot y(t)}{\pi_J(t)} \quad (9)$$

$$y(t+1) := (a \cdot (l(t+1))^{-b} + (1 - a) \cdot (k(t+1))^{-b})^{-\frac{1}{b}} \quad (10)$$

Пусть $V \in 2^{\mathbb{N}}$ — валидационная выборка годов. В качестве доступных данных для алгоритма рассмотрены сведения по: ВВП, экспорту, импорту, конечному потреблению и инвестициям за годы из V в текущих ценах и постоянных ценах одного фиксированного года ([2]); населению страны за годы из V ([3]); занятому в экономике населению страны (либо за все годы из V , либо за какой-нибудь один $t_1 \in V$ и ещё какой-нибудь другой год t_2 (в таком случае требуются данные по населению за год t_2)) ([4]).

Алгоритм предполагает предложение функций от времени и от не более чем двух параметров, моделирующих поведение показателей $\pi_E, \pi_I, \pi_J, \sigma, \delta, \rho, L$ и подбор наилучших значений параметров с индексом Тейла в качестве метрики, а после — выбор значений параметров a, b, μ, α , при которых предсказания модели более всего совпадают со статистическими данными. Алгоритм применён на практике к экономике Монголии с $V := [2021] \setminus [2013]$, статистические данные взяты из [2], [3], [4]. Итоговая свёртка индексов Тейла равна 0.7388638559881604. Ниже приведены графики аппроксимаций для макроэкономических показателей I, J, E, Q, Y на V .

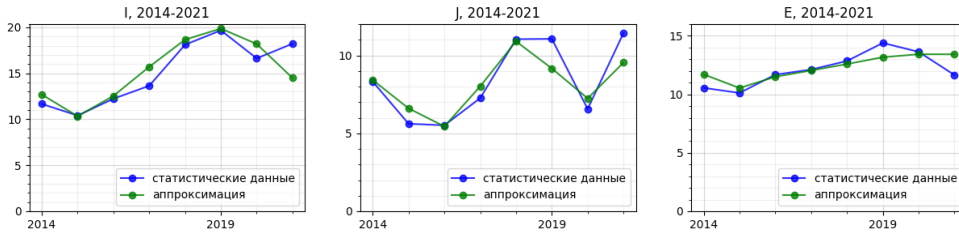


Рис. 1: Аппроксимации I, J, E

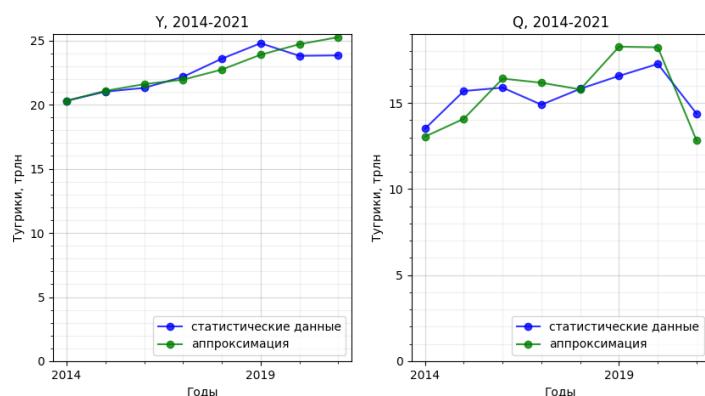


Рис. 2: Аппроксимации Y, Q

Ниже представлено предсказание макроэкономических показателей Y, Q, I, J, E до 2032-го года.

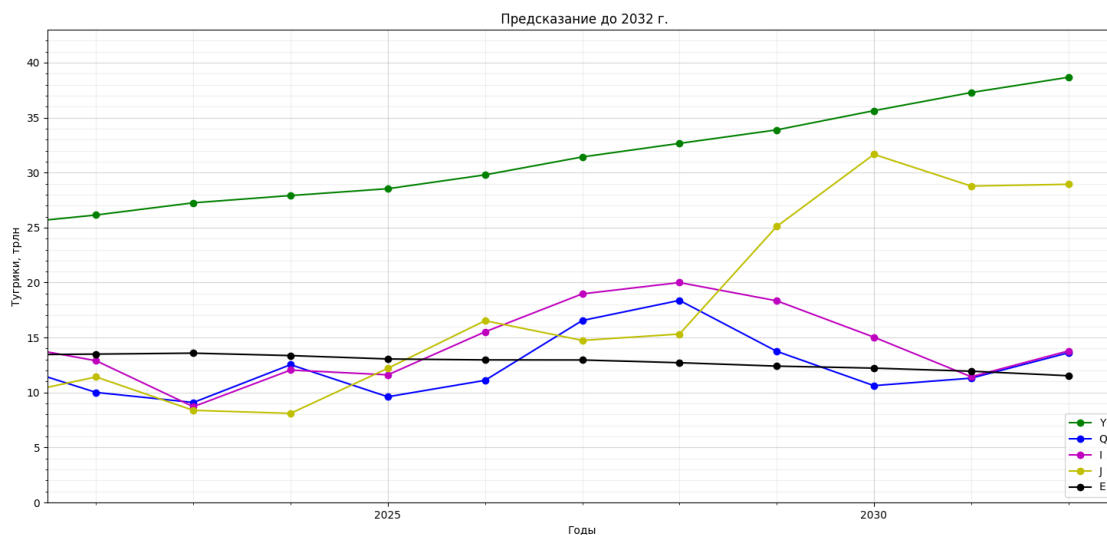


Рис. 3: Предсказания Y, Q, I, J, E до 2032-го года.

Итак, модель Рамсея, изложенная в [1], применённая к экономике Монголии, показала достаточно высокую точность и может быть использована для прогноза основных макроэкономических показателей.

Литература

1. Оленёв Н. Н., Печёнкин Р. В., Чернецов А. М. Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. М.: ВЦ РАН, 2007.
2. Статистические данные ООН [Электронный ресурс]. URL: <https://unstats.un.org/unsd/snaama/downloads>, (дата обращения: 18.04.2023)
3. Численность населения Монголии [Электронный ресурс]. URL: <https://www.populationpyramid.net/ru/монголия/2022/>, (дата обращения: 18.04.2023)
4. Mongolia: employment [Электронный ресурс]. URL: <https://www.theglobaleconomy.com/Mongolia/employed-persons/>, (дата обращения: 18.04.2023)