МОДЕЛЬ РАМСЕЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРИМЕРЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ МОНГОЛИИ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ.

[1]Автор: Моисеев Н.А.
[2]Научный руководитель: Оленёв Н.Н.

[1]Московский физико-технический институт
[2]ФИЦ ”Информатика и управление” РАН

19 мая 2023 г.

Оглавление

Введение

Аннотация

Описана и построена математическая модель экономики Монголии на основе модели Рамсея экономики страны. Идентификация параметров модели осуществлена за счёт сравнения близости рассчитанных по модели временных рядов и статистических данных об экономике и населении Монголии за период 2014-2022 гг. с помощью свёртки критериев Тейла. Кроме того, с помощью построенной математической модели построено предсказание до 2032 г. для основных макроэкономических показателей: ВВП, инвестиций в основной капитал и др.. Также приводится описание модели Удзавы-Лукаса и формулируются задачи для дальнейшей работы.

Модель Рамсея

Модель Рамсея – 1

Рассмотрим вариант математической модели Рамсея экономики страны, изложенный в [1].
Y – ВВП, L – труд, K – капитал, I – импорт, J – инвестиции, C – конечное потребление, E – экспорт, Q – балансирующая величина конечного потребления домашних хозяйств и правительственных организаций.

$$Y(t) = Y_0 \cdot \left[\alpha \cdot \left(\frac{L(t)}{L_0}\right)^{-b} + (1-\alpha) \cdot \left(\frac{K(t)}{K_0}\right)^{-b}\right]^{-\frac{1}{b}} \tag{1}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = \gamma L(t),\ L(t_0) = L_0 \tag{2}$$

$$\frac{dK}{dt}(t) = J(t) - \mu \cdot K(t),\ K(t_0) = K_0 \tag{3}$$

Модель Рамсея – 2

$$\alpha = \frac{Y_0}{K_0} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} p_Y(t) \cdot Y_{current}(t) + p_I(t) \cdot I_{current} = p_C(t) \cdot C_{current}(t) + \\ + p_J(t) \cdot J_{current}(t) + p_E(t) \cdot E_{current}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

$$p_X(t) = \frac{X_{current}(t)}{X(t)}, \ \ X \in \{Y, I, J, E, C\} \tag{6}$$

$$Q(t) = \frac{p_C(t) \cdot C(t)}{p_Y(t)}, \pi_X(t) = \frac{p_X(t)}{p_Y(t)}, X \in \{I, E, C, J\} \tag{7}$$

$$Y(t) + \pi_I(t) \cdot I(t) = Q(t) + \pi_E(t) \cdot E(t) + \pi_J(t) \cdot J(t) \tag{8}$$

Модель Рамсея – 3

$$\sigma(t)=\frac{\pi_J(t)\cdot J(t)}{Y(t)+\pi_I(t)\cdot I(t)},\ \delta(t)=\frac{\pi_E(t)\cdot E(t)}{Y(t)} \tag{9}$$

$$\rho(t)=\frac{\pi_I(t)\cdot I(t)}{Y(t)-\pi_E(t)\cdot E(t)},\ \beta(t)=\sigma(t)\cdot(1+\rho(t)\cdot(1-\delta(t))) \tag{10}$$

$$E(t)=\frac{\delta(t)\cdot Y(t)}{\pi_E(t)}, I(t)=\frac{\rho(t)\cdot(1-\delta(t))\cdot Y(t)}{\pi_I(t)}, \tag{11}$$

$$J(t)=\frac{\sigma(t)\cdot(1+\rho(t)\cdot(1-\delta(t)))}{\pi_J(t)},$$

$$Q(t)=((1-\sigma(t))\cdot(1+\rho(t)\cdot(1-\delta(t)))-\delta(t))\cdot Y(t) \tag{12}$$

Модель Рамсея – 4

$$l(t) = \frac{L(t)}{L_0} = e^{\gamma \cdot t} \; \forall t, \;\; k(t_0) = 1, \;\; y(t_0) = 1 \tag{13}$$

$$k(t+1) = (1-\mu) \cdot k(t) + \frac{\alpha \cdot \beta(t) \cdot y(t)}{\pi_J(t)} \tag{14}$$

$$y(t+1) = (a \cdot (l(t+1))^{-b} + (1-a) \cdot (k(t+1))^{-b})^{-\frac{1}{b}} \tag{15}$$

$$L(t) = L_0 \cdot l(t), \;\; Y(t) = Y_0 \cdot y(t), \;\; K(t) = K_0 \cdot k(t) \tag{16}$$

Параметры: $a \in (0;1)$, $b \in (-1;3) \setminus \{0\}$, $\alpha \in (0;3)$, $\mu \in (-0.2;0.2)$.

Модель Рамсея – 5

$$T(X,Y) = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[X_i - Y_i]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}[X_i^2 + Y_i^2]}} \tag{17}$$

$$S(X^1, Y^1, X^2, Y^2, ..., X^k, Y^k) = \prod_{i=1}^{k}(1 - T(X^i, Y^i)) \tag{18}$$

Алгоритм идентификации модели Рамсея

Алгоритм идентификации модели Рамсея – 1

Шаг 0. Подготовить данные: скачать, отнормировать и т.д..
Шаг 1. Вычислить p_X, p_I, p_J, p_C, p_E.
Шаг 2. Вычислить σ, δ, ρ. Предложить для них приближающие функции не более чем от 2-ух параметров и найти оптимальные значения параметров.
Шаг 3. Вычислить π_I, π_E, π_J. Предложить для них приближающие функции не более чем от 2-ух параметров и найти оптимальные значения параметров.

Алгоритм идентификации модели Рамсея – 2

Шаг 4. Вычислить L. Предложить для этой величины приближающую функцию не более чем от 2-ух параметров и найти оптимальные значения параметров.
Шаг 5. Перебрать $a \in (0;1)$, $b \in (-1;3)$, $\alpha \in (0;3)$, $\mu \in (-0.2;0.2)$, вычислить для каждой четвёрки индексы Тейла $T_X, X \in \{Y, I, E, J, Q\}$ и свёртку $S = (1 - T_Y) \cdot (1 - T_I) \cdot (1 - T_E) \cdot (1 - T_J) \cdot (1 - T_Q)$ и найти оптимальную четвёрку значений параметров.
Шаг 6. Сделать предсказание для величин Y, E, I, J, Q.

Идентификация модели Рамсея

Шаг 0

Подготовим данные по:

- ВВП, импорту, экспорту, конечному потреблению и инвестициям в текущих ценах и постоянных ценах 2015-го года за 2014-2021 гг. ([3]]).
- по населению за 2014-2022 гг. ([4]).
- по количеству занятого в экономике населения за 2021-2022 гг. ([5]).

Шаг 0.1

Данные по количеству занятых в экономике – L – за 2014-2020 гг. вычислим линейной интерполяцией на основе имеющихся данных по количеству занятых в экономике за 2021-2022 гг. и по численности населения за 2014-2022 г..

$$t_1 := 2021,\ t_2 := 2022,\ D := |t_1 - t_2| = 1$$

$$\Delta := \frac{L(2022)}{N(2022)} - \frac{L(2021)}{N(2021)},\ \frac{L(t+1)}{N(t+1)} = \frac{L(t)}{N(t)} + \Delta \tag{19}$$

$$L(t) = N(t) \cdot \frac{L(t)}{N(t)} \tag{20}$$

Шаги 1-2. Часть 1

Вычислим $p_X, X \in \{Y, I, J, C, E\}$.
Положим $\mathcal{M}(W) := \frac{\max(W)+\min(W)}{2}$ $\forall$ линейно упорядоченных множеств W; $x_V := \{x(t)|t \in V\}$, где $x \in \{\sigma, \delta, \rho\}$;
$\rho_< := \{\rho(t)|t \in V, \rho(t) < \mathcal{M}(\rho_V)\}$.
В качестве аппроксимирующих функций применим следующие:

- σ:

$$\hat{\sigma}(t) := A \cdot \sin(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t - S) + M, \tag{21}$$

где $M := \mathcal{M}(\sigma_V),\ A := \max(\sigma_V) - M,$ — фиксированы, $T \in (3.5; 4.5), S \in (-4.5; 4.5)$.

Шаги 1-2. Часть 2

- δ:
$$\hat{\delta}(t) := a \cdot \sin(b \cdot \ln(t - c) + d) + e, \tag{22}$$
где $e := \mathcal{M}(\delta_V)$, $a := \max(\delta_V) - e, c := 2013.94$ — фиксированы, $b \in (0; 1.5), d \in (-1.5; 1.5)$.
- ρ:
$$\hat{\rho}(t) := \max\left(A_b \sin(\frac{2\pi}{T}t - S) + M_b, A_s \sin(\frac{2\pi}{0.181T}t - 0.463S) + M_s\right) \tag{23}$$
где $M_b := \mathcal{M}(\rho_V)$, $A_b := \max(\rho_V) - M_b$, $M_s := \mathcal{M}(\rho_<)$, $A_s := \max(\rho_<) - M_s$ — фиксированы, $T \in (6; 9), S \in (0; 9)$.

Шаги 1-2. Часть 3

Путём перебора (метрика — индекс Тейла) находим оптимальные параметры (в скобках указан шаг поиска):
$\sigma : T = 3.895\,(0.001), S = -1.025\,(0.001)$,
$\delta : b = 0.632\,(0.001), d = -0.949\,(0.001)$,
$\rho : T_b = 8.91(0.01), M_b = 8.41(0.01)$.

Шаги 1-2. Часть 4

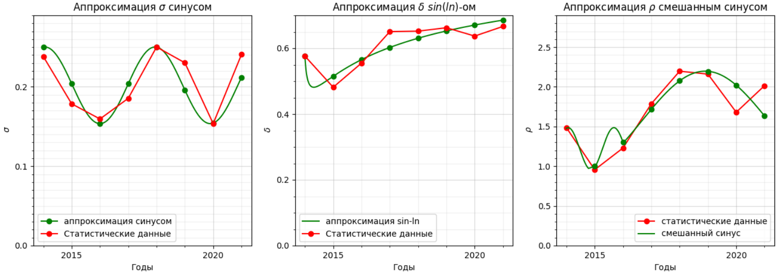

Рис.: Аппроксимации σ, δ, ρ

Шаг 3. Часть 1

Вычислим π_I, π_J, π_E,π_C. В качестве аппроксимирующих функций применим следующие:

1. π_E:

$$\hat{\pi_E}(t) := a_E + (1 - a_E) \cdot e^{-b_E \cdot (t-2014)}, \; a_E, b_E \in [-1; 1]. \tag{24}$$

2. π_I:

$$\hat{\pi_I}(t) := 1 - a_I \cdot (t - 2014)^2 \cdot e^{-b_I \cdot (t-2014)}, \; a_I, b_I \in [-1; 1]. \tag{25}$$

3. π_J:

$$\hat{\pi_J}(t) := a_J - (1 - a_J) \cdot (1 + t - 2014) \cdot e^{-b_J \cdot (t-2014)}, \; a_J \in [-1; 1], \quad b_J \in [-1; 2]. \tag{26}$$

Шаг 3. Часть 2

Путём перебора (метрика — индекс Тейла) находим оптимальные параметры (в скобках указан шаг поиска):
$a_E = 0.75\,(0.01), b_E = -0.11\,(0.01)$, $a_I = 0.01\,(0.01), b_I = 0.22\,(0.01)$, $a_J = 0.99(0.01), b_J = -0.08(0.01)$

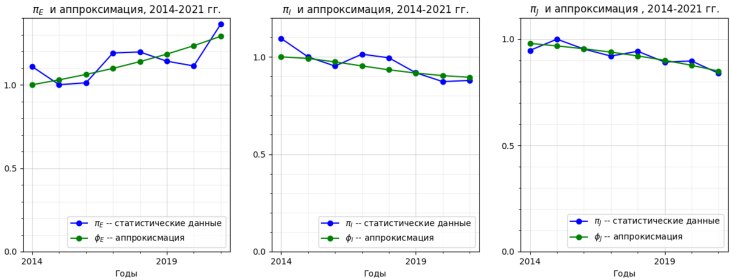

Рис.: Аппроксимации π_E, π_I, π_J

Шаг 4

L аппрокимируем функцией $\hat{L}(t) := A \cdot e^{B(t-2014)}$. С помощью numpy.polyfit() находим оптимальные параметры: $A = 0.9041596646842853$, $B = 0.0324688611651521 7$.

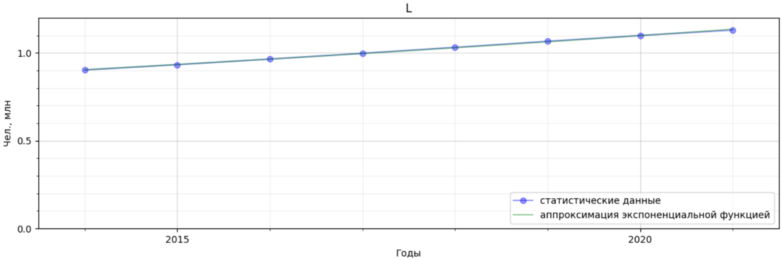

Рис.: Аппроксимация L

Шаг 5. Часть 1

Выполним перебор и получим оптимальные параметры: $a = 0.8\,(0.1), b = 2.9\,(0.1), \mu = 0.198\,(0.001), \alpha = 0.62\,(0.01)$, свёртка равна 0.7388638559881604.

Шаг 5. Часть 2

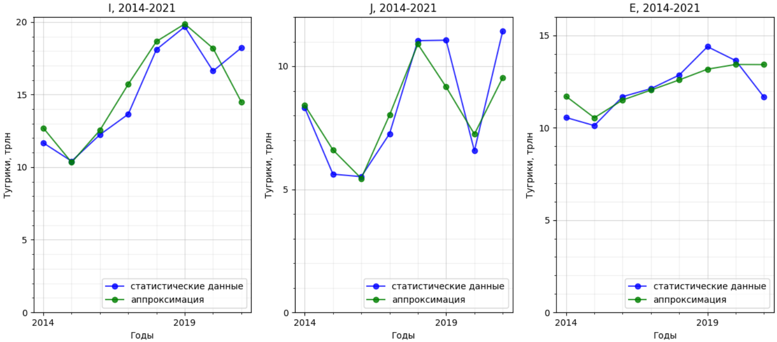

Рис.: Аппроксимации I, J, E.

Шаг 5. Часть 3

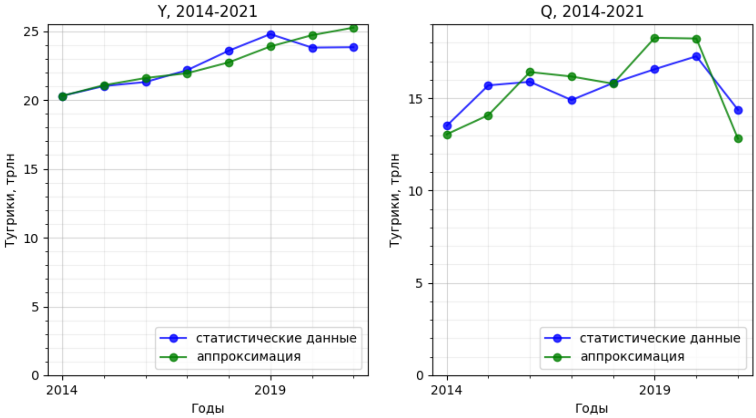

Рис.: Аппроксимации Y, Q

Шаг 6

Сделаем предсказание вышеуказанных макроэкономических показателей до 2032-го года.

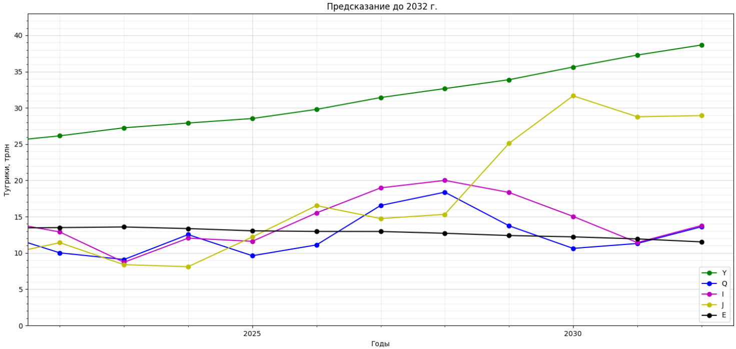

Рис.: Предсказания Y, Q, I, J, E до 2032-го года.

Итог идентификации модели Рамсея

Итак, модель Рамсея, изложенная в [1], применённая к экономике Монголии, показала достаточно высокую точность и может быть использована для прогноза основных макроэкономических показателей на некоторое (но, скорее всего, не очень большое) количество лет вперёд.

Возможные направления работы по улучшению рамсеевской модели экономики Моонголии

1. уточнение сведений по занятому в экономике населению за 2014-2020 гг..
2. подбор более подходящих функций для $\sigma, \rho, \delta, \pi_E, \pi_I, \pi_J, L$ или улучшение предложенных за счёт других значений фиксированных параметров, другого выбора параметров для фиксации и т.д..
3. уменьшение шагов, изменения диапазонов и (или) другие улучшения поиска параметров a, b, μ, α и (или) параметров аппроксимирующих функций.

Модель Удзавы-Лукаса

Модель Удзавы-Лукаса – 1

Опишем модель Уздавы-Лукаса ([6], [7]).
Y – ВВП, C – потребление, I – инвестиции, t – время, t_0 – начальный момент времени, K – совокупный запас физического капитала, $\xi(t) \in (0;1)$ – доля населения, занятого в производстве, h – внешний эффект от среднего уровня образования в экономике, L – население, $L_0 := L(t_0)$, $\overline{h}$ – уровень квалификации работников, H – совокупный запас человеческого капитала, r – процентная ставка в экономике, $\alpha, \beta \in (0;1)$, $A, n, \rho, \gamma > 0$ – параметры модели.
Производственная функция:

$$Y(t) := AK(t)^{\alpha}(\xi(t)H(t))^{1-\alpha}\overline{h}(t)^{\beta}, \;\; Y(t) = C(t) + I(t) \qquad (27)$$

Модель Удзавы-Лукаса – 2. Отсутствие финансовых пирамид

Выполнены условия отсутствия финансовых пирамид (схем Понци):

$$\lim_{t\to+\infty} K(t)e^{-\int\limits_0^t (r(v)-n)dv} \geq 0 \qquad (28)$$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t)L(t)e^{-\int\limits_0^t (r(v)-n)dv} \geq 0 \qquad (29)$$

Модель Удзавы-Лукаса – 3. Условия на функцию полезности индивида

Пусть $u(c)$ – функция полезности индивида от его потребления c.

$$\frac{du}{dc}(c) > 0, \quad \frac{d^2u}{dc^2}(c) < 0 \tag{30}$$

Условие стабильности экономического роста (условия Инады):

$$\lim_{c\to 0}\frac{du}{dc}(c) = +\infty \quad \lim_{c\to\infty}\frac{du}{dc}(c) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\frac{d^2u}{dc^2}(c)}{\frac{du}{dc}(c)} \cdot c = -\theta = const \tag{32}$$

Модель Удзавы-Лукаса – 3. Образование индивида – 1

Образование (квалификация) описывается уравнением:

$$\frac{dh}{dt}(t) = \gamma(1 - u(t))h(t) \tag{33}$$

N – общий объём времени агента, S – время, затраченное на образование, $h_S := e^{\gamma S}$ – уровень образования, $w(t) = e^{g(t)t}$ – уровень зарплаты, где $g(t) = \frac{\frac{dw}{dt}(t)}{w(t)} = g = const < r$ – темп роста зарплаты, z – уровень дохода агента:

$$z(N, S) = \int_S^N h_S w(t) e^{-rt} dt = \frac{e^{\gamma S + gN - rN} - e^{\gamma S + gS - rS}}{g - r} \tag{34}$$

Модель Удзавы-Лукаса – 4. Образование индивида – 2

Агент стремится максимизировать свой доход: $z(t) \to \max$.
Условия максимума:

$$\frac{\partial z}{\partial S}(N, S) = 0 \qquad (35)$$

Получаем оптимальное время на образование:

$$S^* = N - \frac{1}{g-r} \cdot \ln\left(1 + \frac{g-r}{\gamma}\right) \qquad (36)$$

Модель Удзавы-Лукаса – 5

Опуская некоторые промежуточные технические предположения и выкладки, приняв $g_Y^*(t) := \frac{\frac{dY}{dt}(t)}{Y(t)}$ – равновесный темп роста выпуска, $g_C^*(t) := \frac{\frac{dC}{dt}(t)}{C(t)}$ – потребления, получаем:

$$g_C^*(t) = g_Y^*(t) = g_C^* = g_Y^* = \frac{(\gamma - \rho + n)(1 - \alpha + \beta)}{\theta(1-\alpha) - (1-\theta)\beta} + n \tag{37}$$

На душу насаления (на индивида):

$$g_c^* = g_y^* = \frac{(\gamma - \rho + n)(1 - \alpha + \beta)}{\theta(1-\alpha) - (1-\theta)\beta} \tag{38}$$

Модель Удзавы-Лукаса – 6

Равновесный темп роста зарплаты:

$$g = \frac{(\gamma - \rho + n)\beta}{\theta(1-\alpha) - (1-\theta)\beta} \tag{39}$$

Процентная ставка, соответствующая оптимальным темпам роста:

$$r^{**} = \gamma \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha} \tag{40}$$

Преимущества модели Удзавы-Лукаса перед моделью Рамсея и некоторыми другими

- Не требует задания внешних параметров для описания научно-технического прогресса.
- Модель учитывает качество влияние человеческого капитала (и, в частности, образования) на экономику.
- Меньшее (по сравнению с моделью Рамсея) влияние численности трудовых ресурсов.

Недостатки модели Удзавы-Лукаса перед моделью Рамсея и некоторыми другими

- Большее число параметров, притом с, вообще говоря, менее определёнными границами (по сравнению с моделью Рамсея).
- Эмпирические исследования девяностых-нулевых годов ([8], [9]) показали в общем случае довольно слабое влияние человеческого капитала (по крайней мере в том виде, в каком он представлен в модели), из чего следует, что модель хоть и вносит определённый вклад в решение вопроса о причинах экономического роста, но не даёт на него исчерпывающего ответа.

Дальнейшая работа

План дальнейшей работы

- Глубже изучить работы [6], [7].
- Применить опыт построения рамсеевской модели для построения модели Удзавы-Лукаса экономики всемирной или отдельной страны (например, Монголии). Вероятно, будут полезны высокопроизводительные вычисления на кластерном суперкомпьютере.

Источники

Источники – 1

1. Оленёв Н.,Н., Печёнкин Р.,В., Чернецов А.,М. Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. М.: ВЦ РАН, 2007.
2. Mongolia trade balance, exports and imports by country 2020 [Электронный ресурс]. URL: https://wits.worldbank.org/CountryProfile/en/Country/MNG/Year/2020/TradeFlow/EXPIMP/Partner/by-country (дата обращения: 18.04.2023).
3. Статистические данные ООН [Электронный ресурс]. URL: https://unstats.un.org/unsd/snaama/downloads (дата обращения: 18.04.2023)

Источники – 2

4. Численность населения Монголии [Электронный ресурс]. URL: https://www.populationpyramid.net/ru/ /2022/ (дата обращения: 18.04.2023)
5. Mongolia: employment [Электронный ресурс]. URL: https://www.theglobaleconomy.com/Mongolia/employed-persons (дата обращения: 18.04.2023)
6. Lucas, R., 1988. On the Mechanics of Economic Development. Journal of Monetary Economics.

Источники – 3

7. Uzawa, H., 1965. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. International Economic Review.
8. Rauch J. E. Productivity Gains from Geographic Concentration of Human Capital: Evidence from the Cities.
9. Ciccone A., Peri G. Identifying Human-Capital Externalities: Theory with Applications.

Спасибо за внимание!