Вложение классических кос в классические танглы

Никита Шапошник, МФТИ
научный руководитель — В.О. Мантуров

23 мая 2023

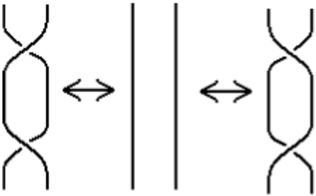
Плоская диаграмма косы

Определение

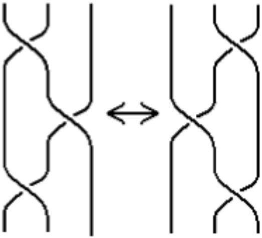
Плоская диаграмма косы есть граф, лежащий внутри прямоугольника $[0, 1] \times [1, n]$, удовлетворяющий условиям:

1. Точки $[0, i]$ и $[1, i]$, $i = 1, \dots, n$ являются вершинами графа валентности один, остальные точки типа $[0, t]$ или $[1, t]$ не являются вершинами графа.
2. Все другие вершины графа имеют валентность 4. Противоположные ребра в таких вершинах образуют угол в 180 градусов.
3. Каждая вершина валентности 4 снабжена структурой "проход-переход".
4. Нити косы, т. е. линии, составленные из рёбер графа, проходящие от ребра к противоположному и идущие от вершины с ординатой 1 к вершине с ординатой 0, должны быть монотонно убывающими относительно координаты t.

Движения Рейдемейстера

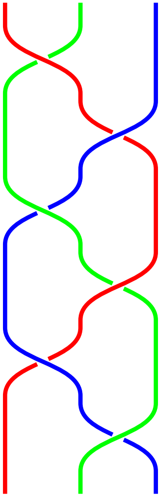


2-е движение
Рейдемейстера



3-е движение
Рейдемейстера

Примеры кос



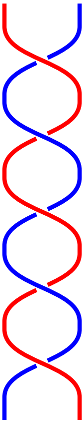


Диаграмма тангла

Определение

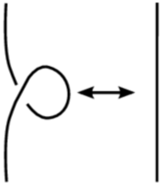
Пусть F — ориентированная компактная связная поверхность. Диаграммой тангла называется граф в F, удовлетворяющий условиям:

1. Все вершины либо имеют степень 1 и лежат на ∂F, либо имеют степень 4 и лежат в $int\ F$.
2. Противоположные ребра в вершинах степени 4 образуют угол в 180 градусов.
3. Каждая вершина валентности 4 снабжена структурой "проход-переход".

Танглы

Определение

Танглом называется класс эквивалентности диаграмм танглов по плоским изотопиям, а также по всем классическим движениям Рейдемейстера.



1-е движение
Рейдемейстера

Постановка задачи

Каждая коса является танглом.
Верно ли, что если две косы эквивалентны как танглы, то они эквивалентны как косы?

Утверждение

Если две классические косы из двух нитей эквивалентны как классические танглы, то они эквивалентны как классические косы.

Идея доказательства через проекцию

Рассмотрим проекцию π, отображающую классические танглы в классические косы так, что

- если β — классическая коса, то $\pi(\beta) = \beta$,
- если τ_1 и τ_2 — два классических тангла, отличающиеся одним движением Рейдемейстера (разрешаются все движения Рейдемейстера), то $\pi(\tau_1)$ и $\pi(\tau_2)$ тоже отличаются не более чем одним движением Рейдемейстера (разрешаются только второе и третье).

Тогда если есть последовательность эквивалентных танглов

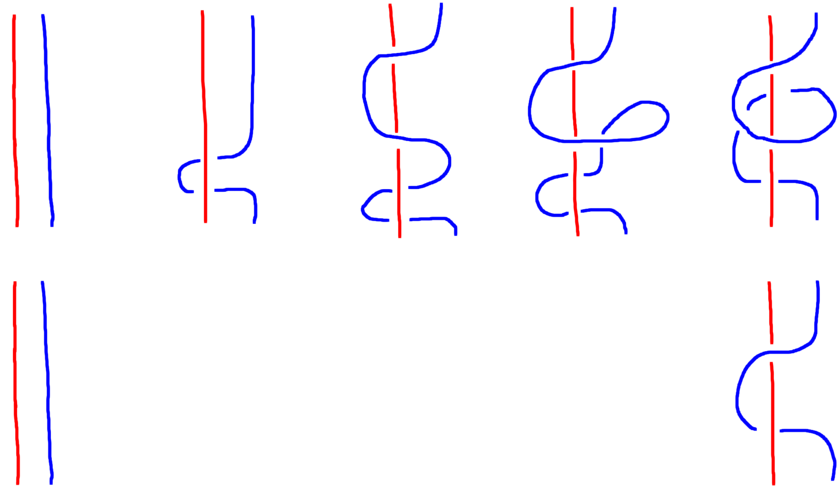
$$\tau_1 \to \tau_2 \to \cdots \to \tau_{N-1} \to \tau_N,$$

то легко получить последовательность эквивалентных кос, что доказывает утверждение:

$$\pi(\tau_1) \to \pi(\tau_2) \to \cdots \to \pi(\tau_{N-1}) \to \pi(\tau_N).$$

Ложное предположение

Первым шагом удалим самопересечения нитей.



Библиография

[1] В.О. Мантуров Теория узлов
Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

[2] V. O. Manturov An elementary proof that classical braids embed into virtual braids
https://arxiv.org/abs/1504.03127v2.

[3] Gaifulin, A.A., Manturov V.O. On the recognition of braids
Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 2022, 11 (8), pp. 1193-1209.

[4] Oleg Chterental Virtual braids and virtual curve diagrams
https://arxiv.org/abs/1411.6313v4.