Forbidden sunflower conjecture

Купавский А., Носков Ф., Русскин Н.

23 мая 2023 г.

Необходимые определения

Гиперграф – семейство подмножеств n-элементного множества.
Можно рассматривать только k-однородные гиперграфы, т. е. только k-элементные подмножества.
Подсолнухом размера s с ядром C называется гиперграф с s ребрами, любые два ребра которого пересекаются в точности по C.
$f(n,k,l,s) = max\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \binom{X}{k}$, т. ч. $\mathcal{F}$ не содержит подсолнух с размера s и мощностью ядра l$\}$
Также часто будем рассматривать подсемейства следующего вида:
$\mathcal{F}(S) := \{A \backslash S : A \in \mathcal{F}, S \subset A\}$

Гипотеза Эрдеша-Радо о подсолнухах

В 1960 году было высказано предположение, что f(n,k,l,s) $< C^k$, для какой-то константы C, зависящей только от s.
Текущий хороший результат – работа 2021 года Альвайсса, Ловетта, Ву и Чжана с улучшением от Тао, а именно
f(n,k,l,s) $< (Cs\log_2(ks))^k$, где C – какая-то константа (например, 2^{10})
В 2022 году А. Купавский совместно с Д. Захаровым разработал новый метод аппроксимации гиперграфов, обладающих определенными свойствами. Цель – использовать его для улучшения существующей оценки в гипотезе о подсолнухах.

Spreadness

В упоминавшейся выше работе широко использовалась идея spread семейств. Для $r \geq 1, \mathcal{F}$ – r-spread, если для любого множества X выполняется $|\mathcal{F}(X)| \leq r^{-|X|}|\mathcal{F}|$

Spreadness

В упоминавшейся выше работе широко использовалась идея spread семейств. Для $r \geq 1, \mathcal{F}$ – r-spread, если для любого множества X выполняется $|\mathcal{F}(X)| \leq r^{-|X|}|\mathcal{F}|$ В методе spread-аппроксимации вводится также связанное определение homogeneity. $\mathcal{F}$ – τ-homogeneous, для $\tau > 1$, если для любого множества X выполняется $|\mathcal{F}(X)| \leq \tau^{|X|}\frac{\binom{n-|X|}{k-|X|}}{\binom{n}{k}}|\mathcal{F}|$

Для семейств, обладающих spreadness либо homogeneity существуют различные теоремы, позволяющие достаточно эффективно с ними работать и оценивать гиперграфы с таким свойством

Spreadness

В упоминавшейся выше работе широко использовалась идея spread семейств. Для $r \geq 1, \mathcal{F}$ – r-spread, если для любого множества X выполняется $|\mathcal{F}(X)| \leq r^{-|X|}|\mathcal{F}|$ В методе spread-аппроксимации вводится также связанное определение homogeneity. $\mathcal{F}$ – τ-homogeneous, для $\tau > 1$, если для любого множества X выполняется $|\mathcal{F}(X)| \leq \tau^{|X|} \frac{\binom{n-|X|}{k-|X|}}{\binom{n}{k}} |\mathcal{F}|$

Для семейств, обладающих spreadness либо homogeneity существуют различные теоремы, позволяющие достаточно эффективно с ними работать и оценивать гиперграфы с таким свойством

Идея – использовать мысль о том, что если гиперграф высокой мощности не содержит определенных конфигураций, то он достаточно "равномерный"относительно материнского множества, что можно использовать при оценках.

Идея аппроксимации

В экстремальной комбинаторике различного рода аппроксимации используются довольно широко. Основная идея – описать большую часть гиперграфа каким-то "хорошим"образом, затем оценить довольно грубо все, что осталось, либо доказать, что остаток пуст.

Идея аппроксимации

В экстремальной комбинаторике различного рода аппроксимации используются довольно широко. Основная идея – описать большую часть гиперграфа каким-то "хорошим"образом, затем оценить довольно грубо все, что осталось, либо доказать, что остаток пуст. Идея spread-аппроксимации – по семейству $\mathcal{F}$ со свойством P, строим $\mathcal{C} \subset \binom{[n]}{\leq q}$ со свойством P', где $q << k$, и почти каждое множество $\mathcal{F}$ содержит в себе хотя бы одно множество из $\mathcal{C}$, причем $\mathcal{C}$ обладает homogeneity/spreadness с нужной нам константой. Тогда мы можем оценивать $\mathcal{C}$ со свойством P' (например, если P это отсутствие подсолнухов с ядром размера l, то P' может быть отсутствием подсолнухов с ядром размера не больше l), и через это распространять оценку на все исходное семейство.

Продвижения

Для гиперграфа $\mathcal{H} \subset \binom{X}{t}$, назовем $\mathcal{H}^+ \subset \binom{X}{k}$ его *расширением*, если $\mathcal{H}^+ = \{H \cup A_H \,:\, H \in \mathcal{H}\}$ для попарно непересекающегося $A_H \in \binom{X \setminus \operatorname{supp} \mathcal{H}}{k-t}$.

Продвижения

Для гиперграфа $\mathcal{H} \subset \binom{X}{t}$, назовем $\mathcal{H}^+ \subset \binom{X}{k}$ его *расширением*, если $\mathcal{H}^+ = \{H \cup A_H \,:\, H \in \mathcal{H}\}$ для попарно непересекающегося $A_H \in \binom{X \setminus \operatorname{supp} \mathcal{H}}{k-t}$.

Хочется понять, для заданных n,k,t,s и мультигиперграфа $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{t}$ мощности s, если семейство $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ не содержит $\mathcal{H}^+$, то насколько большим может быть $|\mathcal{F}|$?

Lemma

Если $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ является τ-homogeneous, то существует $\alpha\binom{n}{d}$ множеств $Y \in \binom{[n]}{d}$ таких, что семейства $\mathcal{F}(Y)$ являются $\hat{\tau}$-homogeneous для

$$\hat{\tau} \geqslant \frac{\tau(1-\alpha)}{\tau^{-d}-\alpha},$$

для $\tau < \alpha^{-1/d}$

Данное утверждение является достаточно общим и вспомогательным при работе с homogeneous-семействами и заключает в себе простую идею о том, что в τ-hom семействе много подмножеств, сходных с ним по свойствам. Доказательство основано на несложных оценках с использованием свойств homogeneous семейств.

Лемма 2

Lemma

Для положительных n, k, s, t*, т.ч.* $n \geqslant k > t$ *и* $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{t}$ *– мультигиперграфа мощностью* s*, если* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ *является* τ*-homogeneous для* $\tau < (1 - 1/s)^{-1/t}$*,*

$$n > \frac{2^{11} \tau k \log_2(ks)}{\tau^{-t} + s^{-1} - 1} \quad \textit{и} \quad n \geqslant \frac{2\tau kt}{\tau^{-t} + s^{-1} - 1},$$

то $\mathcal{F}$ *содержит расширение* $\mathcal{H}$*.*

Лемма 2

Lemma

Для положительных n, k, s, t, *т.ч.* $n \geqslant k > t$ *и* $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{t}$ *– мультигиперграфа мощностью* s, *если* $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ *является* τ*-homogeneous для* $\tau < (1 - 1/s)^{-1/t}$,

$$n > \frac{2^{11} \tau k \log_2(ks)}{\tau^{-t} + s^{-1} - 1} \quad \text{и} \quad n \geqslant \frac{2\tau kt}{\tau^{-t} + s^{-1} - 1},$$

то $\mathcal{F}$ *содержит расширение* $\mathcal{H}$.

Идея доказательства заключается в применении леммы 1 и дальнейшем подсчете матожидания $\mathbb{E}|\mathcal{P} \cap \pi(\mathcal{H})|$ для случайной перестановки π, примененной к ребрам $\mathcal{H}$. Таким образом в $\mathcal{P}$ находится копия $\mathcal{H}$, которую можно расширить с помощью случайной покраски в s цветов.

Лемма 3

Lemma

Для положительных n, k, t, q *т.ч.* $n \geqslant k \geqslant t, q > 0$ *и положительного* τ, $\tau < (1 - s^{-1}/2)^{-1}$. *Пусть*

$$n \geqslant \frac{2^{11}\tau k \log_2(ks)}{\tau^{-t} + s^{-1}/2 - 1}, \quad n \geqslant \frac{\tau k(q+t)}{\tau^{-t} - 1 + s^{-1}/2} \quad \text{и} \quad n \geqslant 2sq^2t^2 + q + t.$$

Если существуют $X_1, \dots, X_s$, *попарно непересекающиеся* $Y_1, \dots, Y_s$ *не пересекающие также* $\bigcup_i X_i$ *и перестановка* π, *т. ч. для любого* $i \in [s]$ *выполняется, что* $X_i \subset \pi(H_i)$, $(\pi(H_i) \setminus X_i) \cap \left(\bigcup_j X_j \cup \bigcup_j Y_j\right) = \varnothing$, $|X_i \cup Y_i| \leqslant q$, *и существует подсемейство* $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ *т.ч.* $\mathcal{F}_i(X_i \cup Y_i)$ τ*-homogeneous для* $\tau < (1 - s^{-1}/2)^{-1}$, *то* $\mathcal{F}$ *содержит расширение* $\mathcal{H}$.

Лемма 3

Lemma

Для положительных n, k, t, q *т.ч.* $n \geqslant k \geqslant t, q > 0$ *и положительного* τ, $\tau < (1 - s^{-1}/2)^{-1}$. *Пусть*

$$n \geqslant \frac{2^{11}\tau k \log_2(ks)}{\tau^{-t} + s^{-1}/2 - 1}, \quad n \geqslant \frac{\tau k(q+t)}{\tau^{-t} - 1 + s^{-1}/2} \quad \text{и} \quad n \geqslant 2sq^2t^2 + q + t.$$

Если существуют $X_1, \ldots, X_s$, *попарно непересекающиеся* $Y_1, \ldots, Y_s$ *не пересекающие также* $\bigcup_i X_i$ *и перестановка* π, *т. ч. для любого* $i \in [s]$ *выполняется, что* $X_i \subset \pi(H_i)$, $(\pi(H_i) \setminus X_i) \cap \left(\bigcup_j X_j \cup \bigcup_j Y_j\right) = \varnothing$, $|X_i \cup Y_i| \leqslant q$, *и существует подсемейство* $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ *т.ч.* $\mathcal{F}_i(X_i \cup Y_i)$ τ*-homogeneous для* $\tau < (1 - s^{-1}/2)^{-1}$, *то* $\mathcal{F}$ *содержит расширение* $\mathcal{H}$.

Идея доказательства близка к предыдущей лемме

Выводы и планы

Таким образом были решены предварительные задачи адаптирования аппроксимации под конкретную проблему
В данном случае хочется аппроксимировать семейством множеств размера не более, чем Cl^2logk (а может и добиться Cl^2, путем неоднократного повторения аппроксимации), а затем использовать имеющиеся методы для работы с подобными структурами – за последние несколько лет их появилось довольно много, можно рассматривать задачу и со стороны булева анализа, например.
Также ведется параллельно работа по доработке и улучшению метода spread-аппроксимации

Литература

1. Andrey Kupavskii and Dmitriy Zakharov. "Spread approximations for forbidden intersections problems 2022
2. Ryan Alweiss et al. "Improved bounds for the sunflower lemma 2021
3. David Ellis, Nathan Keller, and Noam Lifshitz. "Stability for the Complete Intersection Theorem, and the Forbidden Intersection Problem of Erdos and Sos 2018
4. Peter Frankl and Zoltan Furedi. "Exact solution of some Turan-type problems 1987
5. Nathan Keller et al. "On Intersecting Families of Permutations 2023