Оценки числа ребер в подграфах графов Джонсона (под руководством д.ф.-м.н. А.М. Райгородского)

Е. Неустроева

19 мая 2023 г.

Графы Джонсона $G(n, r, s)$

Комбинаторное определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами которого являются все r-элементные подмножества n-элементного множества, а ребрами соединены вершины, соотетствующие множествам, пересекающимся по s элементам.

Графы Джонсона $G(n, r, s)$

Комбинаторное определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами которого являются все r-элементные подмножества n-элементного множества, а ребрами соединены вершины, соотетствующие множествам, пересекающимся по s элементам.

Геометрическое определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами котрого являются все такие $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, что $\forall i \hookrightarrow x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \ldots + x_n = r$, а ребро между вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ проводится в том и только том случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s$.

Постановка задачи

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E | x, y \in W\}|.$$

Постановка задачи

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E | x, y \in W\}|.$$

Определение

$$\rho(l) = \min_{W \subset V, |W| = l} \rho(W).$$

Постановка задачи

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E | x, y \in W\}|.$$

Определение

$$\rho(l) = \min_{W \subset V, |W| = l} \rho(W).$$

Задача

Для функции $l = l(n)$ и последовательности графов $G_n = G(n, r, s)$ оценить значение функции $\rho(l)$.

Обзор результатов в случае $G(n, 3, 1)$

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1 + o(1))\left(c^2 - \frac{1}{96}\right)n^3.$$

Обзор результатов в случае $G(n,3,1)$

Теорема

Для последовательности графов $G(n,3,1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1+o(1))\left(c^2 - \frac{1}{96}\right)n^3.$$

Теорема (уточнение)

Для последовательности графов $G(n,3,1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1+o(1))\left(c^2 - \frac{13}{1320}\right)n^3.$$

Идея доказательства турановского типа: вариант 1

Лемма

При любом n размер максимального независимого подмножества графа $G(n, 3, 1)$ не превосходит n.

Идея доказательства турановского типа: вариант 1

Лемма

При любом n размер максимального независимого подмножества графа $G(n,3,1)$ не превосходит n.

Будем последовательно выделять максимальное независимое множество и удалять его вместе со всеми исходящими из него рёбрами. Таким образом будет получена следующая оценка:

$$\rho([cn^2]) \geqslant [cn^2] - n + [cn^2] - 2n + \ldots + [cn^2] - n \cdot \left[\frac{[cn^2]}{n}\right] =$$

$$= (1+o(1))\left(c^2n^3 - n \cdot \frac{c^2n^2}{2}\right) = (1+o(1))\frac{c^2n^3}{2}.$$

Идея доказательства турановского типа: вариант 2

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n,3,1)$, его максимального независимого подмножества $B, |B| = \beta$ и K — множества вершин H, соединенных ровно с одной вершиной $B, |K| = k$, выполняется $\beta \leqslant n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leqslant n$ и $k \leqslant 6\beta$.

Идея доказательства турановского типа: вариант 2

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n, 3, 1)$, его максимального независимого подмножества $B, |B| = \beta$ и K — множества вершин H, соединенных ровно с одной вершиной $B, |K| = k$, выполняется $\beta \leqslant n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leqslant n$ и $k \leqslant 6\beta$.

Таким образом, если в графе l вершин и $|B| = \beta, |K| = k$, то при удалении множества вершин B будет удалено $2(l - \beta - k) + k = 2l - 2\beta - k$ рёбер.
Можно сделать $\sim cn$ шагов, что в итоге приводит для $c > 1/4$ к результату

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1 + o(1))\left(c^2 - \frac{1}{96}\right)n^3.$$

Идея доказательства турановского типа: вариант 3

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n,3,1)$, его максимального независимого подмножества $B, |B| = \beta$ и K — множества вершин H, соединенных ровно с одной вершиной $B, |K| = k$, выполняется $\beta \leqslant n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leqslant n$ и $k \leqslant 6\beta$.

Идея доказательства турановского типа: вариант 3

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n,3,1)$, его максимального независимого подмножества $B, |B| = \beta$ и K — множества вершин H, соединенных ровно с одной вершиной $B, |K| = k$, выполняется $\beta \leqslant n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leqslant n$ и $k \leqslant 6\beta$.

На каждом шаге мы находим не только независимое множество размера β, но и клику размера k/β. Теперь мы будем поступать одним из двух способов: или удалять только B, или удалять и B, и клику. В любом случе будет удаляться не более $n + 6$ вершин, поэтому можно сделать $\sim cn$ шагов.

На j-ом шаге удаляем v_j вершин и e_j рёбер, перед ним в графе остается $l - \sum_{i=1}^{j-1} v_j$ вершин.
Если удаляем независимое множество, то

$$v_j = \beta_j, e_j = 2\left(l - \sum_{i=1}^{j} v_j\right) - k_j.$$

Если удаляем и независимое множество, и клику, то

$$v_j = \beta_j + \left[\frac{k_j}{\beta_j}\right], e_j = 2\left(l - \sum_{i=1}^{j} v_j\right) - k_j + \frac{k_j^2}{2\beta_j^2} + O\left(\frac{k_j}{\beta_j}\right).$$

Идея доказательства: куммулятивный вклад шагов

Просуммируем количество извлеченных рёбер по всем $T \sim cn$ шагам и получим тем самым оценку $\rho(l)$.

$$\rho(l) \geqslant \sum_{i=1}^{T} e_i = \sum_{i=1}^{T} \left(2\left(l - \sum_{j=1}^{i} v_j\right) + e_i - 2\left(l - \sum_{j=1}^{i} v_j\right)\right) =$$

$$= 2lT - 2\sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{i} v_j + \sum_{i=1}^{T}\left(e_i - 2\left(l - \sum_{j=1}^{i} v_j\right)\right) =$$

$$= 2lT - \sum_{i=1}^{T}\left(2(T - i + 1)v_i - e_i + 2\left(l - \sum_{j=1}^{i} v_j\right)\right)$$

Идея доказательства: параметр A_i

Получили оценку

$$\rho(l) \geqslant 2lT - \sum_{i=1}^{T}\left(2(T-i+1)v_i - e_i + 2\left(l - \sum_{j=1}^{i} v_j\right)\right)$$

Теперь будем каждый раз действовать таким образом, чтобы в итоге максимизировать полученную сумму. Положим

$$A_i = \min\left\{2(T-i+1)\beta_i + k_i, 2(T-i+1)\left(\beta_i + \frac{k_i}{\beta_i}\right) + k_i - \frac{k_i^2}{2\beta_i^2}\right\}.$$

Тогда будет выполняться следующая оценка:

$$\rho(l) \geqslant 2lT - \sum_{i=1}^{T} A_i + O(Tn).$$

Идея доказательства: оценки параметра A_i

Лемма

Для любого $i \in [1, \ldots, T]$ выполняется $A_i \leqslant \frac{(2(T-i+1)+\frac{n}{2})^2}{2} + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [1, \ldots, T - \frac{n}{4} + 1]$ выполняется $_i \leqslant 2(T-i)n + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [T - \frac{n}{20} + 2, \ldots, T - \frac{n}{22} + 1]$ выполняется
$A_i \leqslant 6(T-i+1)n - 48(T-i+1)^2 + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [T - \frac{n}{22} + 2, \ldots, T]$ выполняется
$A_i \leqslant \frac{n^2+16n(T-i+1)+4(T-i+1)^2}{10} + O(n)$.

Итоговый результат и дальнейший план

Теорема

Для последовательности графов $G(n,3,1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1+o(1))\left(c^2 - \frac{13}{1320}\right)n^3.$$

Итоговый результат и дальнейший план

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1 + o(1))\left(c^2 - \frac{13}{1320}\right)n^3.$$

- Совместить подход, описанный выше, с подходом из [2]
- Попробовать построить более точные верхние оценки
- Постараться обобщить результат для других r, s, другого порядка $l(n)$

Литература

- P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, (1981), 1, 357 – 368.
- Я.К. Шубин, *О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов*, Матем. заметки, 111:6 (2022), 929 – 939.
- Ф.А. Пушняков, *О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов*, Матем. заметки, 105:4 (2019), 592 – 602
- Ф.А. Пушняков, А.М. Райгородский, *Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа*, Матем. заметки, 107:2 (2020), 286 – 298.