

Оценки числа ребер в подграфах графов Джонсона (под руководством д.ф.-м.н. А.М. Райгородского)

Е. Неустроева

19 мая 2023 г.

Комбинаторное определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами которого являются все r -элементные подмножества n -элементного множества, а ребрами соединены вершины, соответствующие множествам, пересекающимся по s элементам.

Графы Джонсона $G(n, r, s)$

Комбинаторное определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами которого являются все r -элементные подмножества n -элементного множества, а ребрами соединены вершины, соответствующие множествам, пересекающимся по s элементам.

Геометрическое определение

$G(n, r, s)$ — граф, вершинами которого являются все такие $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, что $\forall i \hookrightarrow x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = r$, а ребро между вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ проводится в том и только том случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s$.

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E \mid x, y \in W\}|.$$

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E \mid x, y \in W\}|.$$

Определение

$$\rho(l) = \min_{W \subset V, |W|=l} \rho(W).$$

Постановка задачи

Определение

$\rho(W)$ — число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. Иными словами,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E \mid x, y \in W\}|.$$

Определение

$$\rho(l) = \min_{W \subset V, |W|=l} \rho(W).$$

Задача

Для функции $l = l(n)$ и последовательности графов $G_n = G(n, r, s)$ оценить значение функции $\rho(l)$.

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in (\frac{1}{4}, 1]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{1}{96} \right) n^3.$$

Обзор результатов в случае $G(n, 3, 1)$

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in (\frac{1}{4}, 1]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{1}{96} \right) n^3.$$

Теорема (уточнение)

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in (\frac{1}{4}, 1]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{13}{1320} \right) n^3.$$

Идея доказательства турановского типа: вариант 1

Лемма

При любом n размер максимального независимого подмножества графа $G(n, 3, 1)$ не превосходит n .

Идея доказательства турановского типа: вариант 1

Лемма

При любом n размер максимального независимого подмножества графа $G(n, 3, 1)$ не превосходит n .

Будем последовательно выделять максимальное независимое множество и удалять его вместе со всеми исходящими из него рёбрами. Таким образом будет получена следующая оценка:

$$\begin{aligned} \rho([cn]^2) &\geq [cn^2] - n + [cn]^2 - 2n + \dots + [cn^2] - n \cdot \left\lceil \frac{[cn^2]}{n} \right\rceil = \\ &= (1 + o(1)) \left(c^2 n^3 - n \cdot \frac{c^2 n^2}{2} \right) = (1 + o(1)) \frac{c^3 n^2}{2}. \end{aligned}$$

Идея доказательства турановского типа: вариант 2

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n, 3, 1)$, его максимального независимого подмножества B , $|B| = \beta$ и K — множества вершин H , соединенных ровно с одной вершиной B , $|K| = k$, выполняется $\beta \leq n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leq n$ и $k \leq 6\beta$.

Идея доказательства турановского типа: вариант 2

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n, 3, 1)$, его максимального независимого подмножества B , $|B| = \beta$ и K — множества вершин H , соединённых ровно с одной вершиной B , $|K| = k$, выполняется $\beta \leq n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leq n$ и $k \leq 6\beta$.

Таким образом, если в графе I вершин и $|B| = \beta$, $|K| = k$, то при удалении множества вершин B будет удалено $2(I - \beta - k) + k = 2I - 2\beta - k$ рёбер.

Можно сделать $\sim cn$ шагов, что в итоге приводит для $c > 1/4$ к результату

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{1}{96} \right) n^3.$$

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n, 3, 1)$, его максимального независимого подмножества B , $|B| = \beta$ и K — множества вершин H , соединенных ровно с одной вершиной B , $|K| = k$, выполняется $\beta \leq n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leq n$ и $k \leq 6\beta$.

Идея доказательства турановского типа: вариант 3

Лемма

Для любого подграфа H графа $G(n, 3, 1)$, его максимального независимого подмножества B , $|B| = \beta$ и K — множества вершин H , соединенных ровно с одной вершиной B , $|K| = k$, выполняется $\beta \leq n$ и хотя бы одно из $\beta + \frac{2k}{\beta} \leq n$ и $k \leq 6\beta$.

На каждом шаге мы находим не только независимое множество размера β , но и клику размера k/β . Теперь мы будем поступать одним из двух способов: или удалять только B , или удалять и B , и клику. В любом случае будет удаляться не более $n + 6$ вершин, поэтому можно сделать $\sim cn$ шагов.

Идея доказательства: j -ый шаг

На j -ом шаге удаляем v_j вершин и e_j рёбер, перед ним в графе остается $l - \sum_{i=1}^{j-1} v_i$ вершин.

Если удаляем независимое множество, то

$$v_j = \beta_j, e_j = 2\left(l - \sum_{i=1}^j v_i\right) - k_j.$$

Если удаляем и независимое множество, и клику, то

$$v_j = \beta_j + \left\lceil \frac{k_j}{\beta_j} \right\rceil, e_j = 2\left(l - \sum_{i=1}^j v_i\right) - k_j + \frac{k_j^2}{2\beta_j^2} + O\left(\frac{k_j}{\beta_j}\right).$$

Идея доказательства: куммулятивный вклад шагов

Просуммируем количество извлеченных рёбер по всем $T \sim cn$ шагам и получим тем самым оценку $\rho(l)$.

$$\begin{aligned}\rho(l) &\geq \sum_{i=1}^T e_i = \sum_{i=1}^T \left(2 \left(l - \sum_{j=1}^i v_j \right) + e_i - 2 \left(l - \sum_{j=1}^i v_j \right) \right) = \\ &= 2lT - 2 \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^i v_j + \sum_{i=1}^T \left(e_i - 2 \left(l - \sum_{j=1}^i v_j \right) \right) = \\ &= 2lT - \sum_{i=1}^T \left(2(T - i + 1)v_i - e_i + 2 \left(l - \sum_{j=1}^i v_j \right) \right)\end{aligned}$$

Идея доказательства: параметр A_i

Получили оценку

$$\rho(l) \geq 2lT - \sum_{i=1}^T \left(2(T-i+1)v_i - e_i + 2 \left(l - \sum_{j=1}^i v_j \right) \right)$$

Теперь будем каждый раз действовать таким образом, чтобы в итоге максимизировать полученную сумму. Положим

$$A_i = \min \left\{ 2(T-i+1)\beta_i + k_i, 2(T-i+1) \left(\beta_i + \frac{k_i}{\beta_i} \right) + k_i - \frac{k_i^2}{2\beta_i^2} \right\}.$$

Тогда будет выполняться следующая оценка:

$$\rho(l) \geq 2lT - \sum_{i=1}^T A_i + O(Tn).$$

Идея доказательства: оценки параметра A_i

Лемма

Для любого $i \in [1, \dots, T]$ выполняется $A_i \leq \frac{(2(T-i+1) + \frac{n}{2})^2}{2} + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [1, \dots, T - \frac{n}{4} + 1]$ выполняется $i \leq 2(T - i)n + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [T - \frac{n}{20} + 2, \dots, T - \frac{n}{22} + 1]$ выполняется $A_i \leq 6(T - i + 1)n - 48(T - i + 1)^2 + O(n)$.

Лемма

Для любого $i \in [T - \frac{n}{22} + 2, \dots, T]$ выполняется $A_i \leq \frac{n^2 + 16n(T - i + 1) + 4(T - i + 1)^2}{10} + O(n)$.

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in (\frac{1}{4}, 1]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{13}{1320} \right) n^3.$$

Теорема

Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in (\frac{1}{4}, 1]$ выполняется неравенство

$$\rho([cn^2]) \geq (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{13}{1320} \right) n^3.$$

- Совместить подход, описанный выше, с подходом из [2]
- Попробовать построить более точные верхние оценки
- Постараться обобщить результат для других r, s , другого порядка $l(n)$



Р. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, (1981), 1, 357–368.



Я.К. Шубин, *О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов*, Матем. заметки, 111:6 (2022), 929–939.



Ф.А. Пушняков, *О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов*, Матем. заметки, 105:4 (2019), 592–602



Ф.А. Пушняков, А.М. Райгородский, *Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа*, Матем. заметки, 107:2 (2020), 286–298.