УДК 519.176

Новая ценка числа ребер в подграфах графов Джонсона

Е.А. Неустроева, А.М. Райгородский

Московский физико-технический институт

Будем рассматривать один из классов дистанционных графов, а именно графы Джонсона. Мы будем пользоваться их комбинаторным определением: зафиксируем n-элементное множество (например, $\{1, 2, \ldots, n\}$) и вершинами графа Джонсона $G(n, r, s)$ будем считать всевозможные его r-элементные подмножества, а ребром будем соединять вершины, соответствующие подмножествам, пересекающимся по s элементам.

Мы будем исследовать число ребер в индуцированных подграфах на определенном числе вершин. Для этого обозначим $\rho(W)$ число ребер в подграфе графа $G = (V, E)$, индуцированном множеством вершин $W \subset V$. То есть,

$$\rho(W) = |\{(x, y) \in E | x, y \in W\}|.$$

Также обозначим

$$\rho(l) = \min_{W \subset V, |W| = l} \rho(W).$$

Случай графа $G(n, 3, 1)$ изучался в серии работ Шубина ([1]) и Пушнякова ([2], [3]) и был получен следующий результат.

Теорема 1. *Для серии графов $G(n, 3, 1)$ верны следующие утверждения:*

1) Если функция $l = l(n)$ такова, что $n = o(l), l = o(n^2)$, то $\rho(l) \sim \frac{l^2}{2n}$,

2) Если функция $l = l(n)$ такова, что $n^2 = o(l)$, то $\rho(l) \sim \frac{9l^2}{2n}$.

Мы рассматриваем не изученный ранее случай $l = \Theta(n^2)$ и исследуем граф $G(n, 3, 1)$ и $\rho(l)$ при $l = [cn^2]$ для $c \in [0, 1]$.

При помощи теоремы Турана можно получить следующую оценку (подробнее см. [4]).

Теорема 2. *Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ при $l = [cn^2]$ выполняется оценка*

$$\rho(l) \geqslant (1 + o(1)) \frac{c^2 n^3}{2}.$$

Улучшение предыдущего результата представлено в работе [1]

Теорема 3. *Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ при $l = [cn^2]$ выполняется неравенство*

$$\rho(l) \geqslant (1 + o(1)) \left(\frac{9c^2}{2} - 3c \right) n^3.$$

Этот результат весьма полно описывает поведение величины $\rho([cn^2])$ при больших c, поэтому мы оставновились на рассмотрении малых, и в работе [4] нами были получены следующие результаты.

Теорема 4. *Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ выполняется неравенство*

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1 + o(1)) \left(\frac{c^2}{2} + \frac{4}{3} \left(\frac{c - \frac{1}{8}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) n^3.$$

Теорема 5. *Для последовательности графов $G(n, 3, 1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство*

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1 + o(1)) \left(c^2 - \frac{1}{96} \right) n^3.$$

Здесь представлено улучшение теоремы 5, а именно следующий результат.

Теорема 6. *Для последовательности графов $G(n,3,1)$ и $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$ выполняется неравенство*

$$\rho([cn^2]) \geqslant (1+o(1))\left(c^2 - \frac{13}{1320}\right)n^3.$$

Идея доказательства заключается в последовательном извлечении из графа максимального независимого множества со всеми исходящими из него ребрами и, возможно, клики определенного вида. Для подсчета числа рёбер используется слудующеей утверждение.

Лемма. *Для любого подграфа H графа $G(n,3,1)$, его максимального независимого подмножества $B, |B| = \beta$, и K — множества вершин H, соединенных ровно с одной вершиной $B, |K| = k$, выполняется неравенство $\beta \leqslant n$ и хотя бы одно из неравенств $\beta + \frac{2k}{\beta} \leqslant n$ и $k \leqslant 6\beta$.*

Все вышеупомянутые оценки величины $\rho([cn^2])$ имеют вид $(1+o(1))f(c)n^3$. Поэтому чтобы сравнить оценки будем сравнивать функции $f(c)$ при $c > \frac{1}{4}$. Новая полученная оценка всюду превосходит нашу предыдующую оценку и оценку, полученную из теоремы Турана, а также превосходит оценку из теоремы 3 при $0.25 < c < 0.8552$.

Список литературы

[1] Я.К. Шубин, *О минимальном числе ребер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов*, Матем. заметки, 111:6 (2022), 929 – 939.

[2] Ф. А. Пушняков, *О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов*, Матем. заметки, 105:4 (2019), 592 – 602

[3] Ф.А. Пушняков, А.М. Райгородский, *Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа*, Матем. заметки, 107:2 (2020), 286 – 298.

[4] Е.А. Неустроева, А.М. Райгородский, *Оценки числа ребер в подграфах графов Джонсона*, Матем. заметки, ?:? (?), ? – ?. [рекомендована рецензентом к печати, но еще не опубликована]