

Сборник задач
по основам
дискретной математики

Кисляков Иван Дмитриевич

ГБОУ Школа 67, г.Москва

13 мая 2023 г.

Оглавление

1	Математическая логика	2
1.1	Введение и начало систем счисления	2
1.2	Арифметика сс и начало булевой алгебры	4
1.3	Булева Алгебра	4
1.4	Многочлены Жегалкина	5
1.5	КНФ и ДНФ	5
2	Теория множеств и комбинаторика	7
2.1	Введение в множества и правила комбинаторики	7
2.2	Принцип Дирихле & Комбинаторные формулы	8
2.3	Комбинаторные формулы часть 2	9
2.4	Бином Ньютона & Комбинаторные тождества	10
2.5	Продвинутая теория множеств	11
2.6	Математическая индукция	11
3	Теория графов	13
3.1	Понятие графа & Степень вершины	13
3.2	Циклы, пути и раскраски	14
3.3	Раскраски графов	15
3.4	Деревья и кодирование	17
3.5	Планарность графов и итог	18
3.6	Дополнительные главы	19

Глава 1

Математическая логика

1.1 Введение и начало систем счисления

№1 Дайте определение позиционной и непозиционной системы счислений. В чем различия между этими двумя видами систем счислений?

№2 Придумайте свою непозиционную систему счисления. Опишите правила записи этой системы счислений. С ее помощью запишите день, месяц и год своего рождения.

№3 Сколько цифр в позиционной системе счисления с основанием 2, 4, 10, 28?

№4 Выпишите таблицу перевода (до 20_{10}) из системы счисления с основанием 10 в систему счислений с основанием 2, 4, 8 и 16.

№5 Переведи(по таблице) в двоичную систему счисления: 10_{10} ; 3_{10} ; 18_{10}

№6 Переведи(по таблице) в десятичную систему счисления: 10_2 ; 000110_2 ; 1111_2 ; 10000_2

№7 На какую цифру оканчиваются четные числа в системе счислений с основанием 4.

№8 Какая самая большая возможная цифра в системе счислений с основанием 7? 10? 11?

№9 Выберите, какие из приведенных ниже чисел не существуют? Почему?

А) 167_8

Б) 127_6

В) ABC_{13}

Г) 101021_3

- №10 Переведите в 10-ую систему счислений число 1011_2
- №11 Переведите в 10-ую систему счислений число 1100_2
- №12 Переведите в 10-ую систему счислений число 333_4
- №13 Переведите в 10-ую систему счислений число 128_9
- №14 Переведите в 10-ую систему счислений число 10101_2
- №15 Переведите в 10-ую систему счислений число 10000_2
- №16 Переведите в 10-ую систему счислений число 1165_7
- №17 Переведите в 10-ую систему счислений число $1A_{16}$
- №18 Переведите в 10-ую систему счислений число $1D0_{16}$
- №19 Переведите в 10-ую систему счислений число $2E0_{16}$
- №20 Переведите в 10-ую систему счислений число $2A_{12}$
- №21 Переведите в 10-ую систему счислений число 48_{10}
- №22 Переведите в 2-ую систему счислений число 48_{10}
- №23 Переведите в 2-ую систему счислений число 54_{10}
- №24 Переведите в 2-ую систему счислений число 83_{10}
- №25 Переведите в 2-ую систему счислений число 162_{10}
- №26 Переведите в 2-ую систему счислений число 181_{10}
- №27 Переведите в 3-ую систему счислений число 181_{10}
- №28 Переведите в 5-ую систему счислений число 215_{10}
- №29 Переведите в 7-ую систему счислений число 86_{10}
- №30 Переведите в 16-ую систему счислений число 31_{10}
- №31 Переведите в 16-ую систему счислений число 165_{10}
- №32 Переведите в 16-ую систему счислений число 165_9
- №33 Переведите в 5-ую систему счислений число 165_8
- №34 Переведите в 4-ую систему счислений число $1AB_{16}$
- №35 Переведите в 3-ую систему счислений число 255_6
- №36 Переведите в 7-ую систему счислений число 887_9
- №37 Переведите в 16-ую систему счислений число 1650_7
- №38 Переведите в 8-ую систему счислений число 3124_5
- №39 Среди приведенных ниже чисел найдите минимальное и запишите его в ответ в системе счислений с основанием 10.
 А) 36_{16} В) 65_8 С) 111010_2 D) 58_9
- №40 Среди приведенных ниже чисел найдите наименьшее и запишите его в ответ в системе счислений с основанием 10.
 А) 41_{16} В) 77_8 С) 1000010_2 D) 126_7
- №41 Среди приведенных ниже чисел найдите наибольшее и запи-

шите его в ответ в системе счислений с основанием 10.

A) 46_{16} B) 106_8 C) 001010_3 D) 1000101_2

№42 Среди приведенных ниже чисел найдите максимальное и запишите его в ответ в системе счислений с основанием 16.

A) $A1_{16}$ B) 772_8 C) 11010111_2 D) 12312_4

№43 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $1011_2 + 101_2$

№44 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $111_2 + 10101_2$

№45 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $123_4 + 322_4$

№46 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $183_9 + 218_8$. Результат запишите в 5-ой системе счислений.

№47 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $1AB_{16} + 8CE_{16}$. Результат запишите в 8-ой системе счислений.

№48 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $999_{16} + AAA_{16}$

№49 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $312_{16} + 10FA_{16} + 242D_{16}$

№50 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $242_5 - 104_5$

№51 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $151_6 - 205_6 + 3001_6$

№52 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $ABD_{16} + 102_{16} - DB_{16}$

№53 Выполните арифметические действия в заданной системе счислений: $506_{17} + 878_{16} + 32_{16}$. Результат запишите в 8-ой системе счислений.

№54 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 10101101_2 в 4-ой системе счислений.

№55 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 12131_4 в 2-ой системе счислений.

№56 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 010101101_2 в 16-ой системе счислений.

№57 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 12312_4 в 16-ой системе счислений.

№58 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 1221_3 в 9-ой системе счисления.

№59 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 824_9 в 3-ой системе счисления.

№60 С помощью методов быстрого перевода, запишите число 123321_4 в 16-ой системе счисления.

№61 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $135_8 \cdot 751_8$

№62 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $1AB_{16} \cdot 712_{16}$

№63 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $123_7 \cdot 321_7$

№64 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $144_5 \cdot 121_5 + 34_5$

№65 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $(123_4 + 221_4) \cdot 121_4$

№66 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $172_8 \cdot (235_8 - 321_8 + 1001_8)$. Вычислите и запишите ответ в 16-ой системе счисления.

№67 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $3A1_{16} \cdot (12_{16} + 88_{16})$. Вычислите и запишите ответ в 8-ой системе счисления.

№68 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $123_5 + 321_5 \cdot 221_5 \cdot 131_5$. Вычислите и запишите ответ в 16-ой системе счисления.

№69 Выполните арифметические действия в заданной системе счисления: $(141_6 + 2441_6 - 325_6) \cdot (1000_6 - 51_6 + 54_6) + 103_6$. Вычислите и запишите ответ в 16-ой системе счисления.

1.2 Арифметика сс и начало булевой алгебры

Задание 1 Вычислите: $101011_2 + 1101011_2$

Задание 2 Вычислите: $1101011_2 + 11111_2$

Задание 3 Вычислите: $10201_3 + 112_3$

Задание 4 Вычислите: $1101_2 \cdot 101_2$

Задание 5 Вычислите: $11011_3 \cdot 102_3$

Задание 6 Как в двоичной системе счисления (других сс с основанием 2^n) можно определить делимость на $2, 4, \dots, 2^k$. Почему?

Задание 7 Выпишите ответ в 2-ой системе счисления: $2^{1000} + 4^{1011} + 2^2$

Задание 8 Выпишите ответ в 2-ой системе счисления: $2^{1000} + 4^{1011} + 2^4 - 2^1$

Задание 9 Выпишите ответ в 3-ой системе счисления: $3^{1000} + 3^{2011} - 3^{100} - 3^2$

Задание 10 Выпишите ответ в 8-ой системе счисления: $8^{1000} + 7 \cdot 8^{2023} - 64^{100} - 1$

Задание 11 Выпишите ответ в 6-ой с.с.: $5 \cdot 6^{2022} + 4 * 36^{501} - 3 \cdot 6^{209} - 6^3 + 3^{16} \cdot 2^{16}$

Задание 12 Решите уравнение: $2x5_6 = 1x7_8$ относительно x .

Задание 13 Решите уравнение: $2yC_{16} = 41y_{13}$ относительно y .

Задание 14 Постройте таблицу истинности А и В (А или В)

Задание 15 Чему равно не(не А). Постройте таблицу истинности и Докажите эквивалентность формул.

Задание 16 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \wedge b$

Задание 17 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \vee \neg b$

Задание 18 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \vee (\neg b \wedge c)$

Задание 19 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \vee \neg a$

Задание 20 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \wedge \neg a$

Разложите фразу на термы и вычислите:

Задание 21 Яблоко вкусное, сладкое, но не синее

Задание 22 Гиппопотам озорное, фиолетовое, воздушное, но не брезентовое, при этом вредное существо.

Задание 23 Конституционными правами человека является право есть свое мороженое до конца, человек может править миром, если он этого сам хочет, может заставлять других делать свою работу. Но никто не может заставить тебя делать ту работу, которую ты не хочешь делать.

Задание 24 Комар зеленый, пищащий и нудящий или комар имеет хоботок и ужасен при рассмотрении в микроскоп. Верно ли это утверждение?

Задание 25 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg(b \wedge c)$

Задание 26 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg(b \wedge \neg c) \vee b$

Задание 27 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg(b \vee c)$

Задание 28 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \vee (b \wedge c \wedge a)$

Задание 29 Постройте таблицу истинности выражения: $\neg a \vee (\neg b \wedge c \wedge \neg a)$

1.3 Булева Алгебра

№1 Постройте таблицу истинности выражения: $a \rightarrow b \vee b$

№2 Постройте таблицу истинности выражения: $a \rightarrow b \vee \neg b$

№3 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ – что это может означать в реальной жизни?

№4 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$ – что это может означать в реальной жизни?

№5 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b) \vee b \wedge (c \rightarrow a)$

№6 Докажите: $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$

№7 Докажите: $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$

№8 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b) \rightarrow c$

№9 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b \wedge c) \rightarrow c$

№10 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b \wedge b \rightarrow a) \rightarrow c$

№11 Постройте таблицу истинности выражения: $a \oplus b$

№12 Найдите a и b : $(a \oplus b) \rightarrow b = 0$

№13 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \equiv b) \oplus (b \equiv a)$

№14 Постройте таблицу истинности выражения: $(a \rightarrow b) \oplus (a \equiv c) \vee (a \rightarrow c \vee b)$

1.4 Многочлены Жегалкина

Задание 0 Выпишите многочлен Жегалкина в общем виде.

Постройте многочлен Жегалкина:

Задание 1 $a \wedge b$

Задание 2 $a \vee b$

Задание 3 $a \vee b \vee a \wedge \neg b$

Задание 4 $a \rightarrow b$

Задание 5 $a \oplus b$

Задание 6 $(a \rightarrow b) \downarrow b$

Задание 7 $a \wedge b \rightarrow b$

Задание 8 $a \wedge b \rightarrow c$

Задание 9 $a \wedge b \vee c$

Задание 10* $a \wedge b \wedge c$

Задание 11 $(a \equiv b) \rightarrow c$

Задание 12 Попробуйте решить проще, чем обычно: $((a \leftrightarrow b) \rightarrow c) \oplus b$

Задание 13 $(a \downarrow c) \rightarrow b$

Упростите выражение, а затем найдите многочлен Жегалкина:

Задание 14 $((a \rightarrow b) \rightarrow c) \rightarrow a$

Задание 15 $\neg(\neg a \vee b) \rightarrow c$

Задание 16 $\neg(c \vee b) \oplus (b \rightarrow (a \equiv b))$

Задание 17 $\neg(a \oplus b) \equiv (a \rightarrow c)$

Задание 18 $k \rightarrow (m \rightarrow (c \equiv m))$

Задание 19* $k \wedge m \wedge z \wedge d$

Задание 20 $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \equiv f)$

Задание 21 $a \oplus b \oplus c \wedge f$

Домашнее задание:

Составьте многочлены Жегалкина, предварительно упростив выражения, если это возможно:

ДЗ №1 $(1 \oplus 0)$ Вычислить: $a \rightarrow (b \rightarrow (b \wedge \neg a))$

ДЗ №2 $(a \oplus b) \vee (a \rightarrow b)$

ДЗ №3 $(a \rightarrow b) \vee (a \equiv b)$

ДЗ №4 $a \vee b \vee c \wedge a$

ДЗ №5 $(\neg(\neg a \rightarrow b) \rightarrow c) \oplus (a \equiv (b \rightarrow \neg c))$

1.5 КНФ и ДНФ

КНФ имеет вид: $(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge \dots$ - ищем 0

ДНФ имеет вид: $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee \dots$ - ищем 1

Постройте многочлен КНФ:

Задание 1 $a \wedge b \rightarrow c$

Задание 2 $a \wedge b \vee c$

Задание 3 $a \wedge b \wedge c$

Задание 4 $(a \equiv b) \rightarrow c$

Задание 5 $((a \leftrightarrow b) \rightarrow c) \oplus b$

Задание 6 $(a \downarrow c) \rightarrow b$

Задание 7 - 13 Постройте ДНФ для номеров 1 - 6

Найдите КНФ или ДНФ - смотря что удобнее:

Задание 14 $((a \rightarrow b) \rightarrow c) \rightarrow a$

Задание 15 $\neg(\neg a \vee b) \rightarrow c$

Задание 16 $\neg(c \vee b) \oplus (b \rightarrow (a \equiv b))$

Задание 17 $\neg(a \oplus b) \equiv (a \rightarrow c)$

Задание 18 $k \rightarrow (m \rightarrow (c \equiv m))$

Задание 19* $k \wedge m \wedge z \wedge d$

Задание 20 $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \equiv a)$

Задание 21 $a \oplus b \oplus c \wedge a$

Домашнее задание:

Составьте КНФ и ДНФ, предварительно упростив выражения, если это возможно:

ДЗ №1 $(1 \vee 0)$ Вычислить: $\neg a \rightarrow (b \rightarrow (b \wedge a))$

ДЗ №2 $(a \equiv b) \vee (\neg a \rightarrow b)$

ДЗ №3 $(a \rightarrow b) \vee (a \equiv b)$

ДЗ №4 $a \vee b \vee c \wedge a$

ДЗ №5 $(\neg(\neg a \rightarrow b) \rightarrow c) \oplus (a \equiv (b \rightarrow \neg c))$

Глава 2

Теория множеств и комбинаторика

2.1 Введение в множества и правила комбинаторики

Задание 1 Что такое множество? Выпишите определение.

Задание 2 Какие способы задания множеств бывают?

Задание 3 Истины ли равенства? $\{1; 2; 3\} = \{3; 1; 2\}$

$$\{1; 2; 3; \dots\} = \{x | x - \text{натуральное}\}$$

$$\{1; 2; 17\} = \{1; 2; \{17\}\}$$

Задание 4 Что такое равномощные множества? Приведите примеры.

Задание 5 Запишите с помощью математических символов: Множество четных натуральных чисел меньших 10 (две записи).

Задание 6 Что такое подмножество? Разница подмножества и принадлежности. Приведите пример.

Задание 7 Сколько элементов в множествах? \emptyset $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset; \{\emptyset\}\}$

Задание 8 Докажите, что если $(a \in A) \wedge (A \subset B)$, то $a \in B$

Задание 9 Докажите, что если $(a \in A) \wedge (A \in B)$, то $a \notin B$

Задание 10 Выпишите правило произведения. Приведите пример.

Задание 11 В магазине канцтоваров продаются ручки 5 разных видов, карандаши 3 разных видов, тетради 4 видов. Сколько можно

составить комплектов из одной ручки, тетради и карандаша.

Задание 12 Из города А в Б существует 5 дорог. Из города Б в город Г 4 дороги. Сколько существует маршрутов из А в Г.

Задание 13 Сколько существует трехзначных четных чисел?

Задание 14 Найдите количество трехзначных чисел, кратных 5.

Задание 15 Сколько различных пар, состоящих из гласной и согласной букв, можно получить из букв слова КОМБИНАТОРИКА?

Задание 16 Монету подбрасывают пять раз. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Задание 17 В футбольной команде 11 человек. Нужно выбрать капитана и его ассистента. Сколькими способами это можно сделать?

Задание 18 Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, используя каждую из цифр ровно по одному разу?

Задание 19 Каких пятизначных чисел больше: не делящихся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка?

Задание 20 Выпишите правило суммы. Приведите пример.

Задание 21 На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

Задание 22 В классе 15 девочек, 10 мальчиков и 2 учителя. Завучу необходимо выбрать человека для помощи с дежурством. Сколько у него возможно вариантов выбора?

Задание 23 Вы пришли в столовую. Там есть 3 вида компотов, черный и зеленый чай. Вы берете что-то одно. Сколько существует вариантов Вашего выбора?

Задание 24 Из города А в Б 4 пути, из Б в Г 3 пути. Из А также есть 6 путей в Д, а из Д в Г еще 2 пути. Сколькими способами можно добраться из А в Г.

Задание 25 Сколько всего трехзначных чисел, в которых ровно две цифры — девятки.

Задание 26 Есть 5 книг. Сколькими способами их можно расположить на книжной полке?

Домашнее задание:

ДЗ №1 Есть ли разница между $\emptyset \subset A$ и $\emptyset \in A$? Приведите пример,

или докажете одинаковость.

ДЗ №2 Сколько существует трехзначных нечетных чисел?

ДЗ №3 Игральный кубик 7 раз кинули на стол. Сколько существует различных последовательностей выброшенных чисел.

ДЗ №4 Из Москвы в Питер ходит 5 поездов по разным путям. Из Питера в Магадан ходят 3 поезда по разным путям. Сколько существует способов добраться из Москвы в Магадан?

ДЗ №5 На тарелке лежит 3 банана и 4 яблока. Вы выбираете один фрукт. Сколько способов выбрать фрукт у вас есть?

ДЗ №6 (Усложнение задачи 4) Пусть еще есть 2 пути из Москвы в Тулу, а из Тулы в Магадан тоже 2. Сколько существует способов добраться из Москвы в Магадан?

2.2 Принцип Дирихле & Комбинаторные формулы

Вычислите факториал:

Задание 1 а) $3!$ б) $5!$ в) $2! \cdot 4!$ г) $5! - 3!$

Задание 2 а) $\frac{5!}{2!}$ б) $\frac{17!}{18!}$ в) $\frac{2022!}{22!} \times \frac{21!}{2021!}$ г) $0!$

Задание 3 Запишите *упрощенный признак Дирихле*

Задание 4 В автобусе ехало 17 детей и один учитель. Докажите, что кому-то придется ехать стоя, если в автобусе всего 15 мест.

Задание 5 У лакея 15 груш и 17 яблок. К его господину пришло 27 гостей. Докажите, что найдется гость, которому не хватит фруктов. Может ли быть так, что не хватит фруктов более чем 5 гостям?

Задание 6 В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Задание 7 Запишите **признак Дирихле**

Задание 8 Докажите, что при расфасовке 23 груш по 5 пакетам, найдется хотя бы один пакет, в котором будет 5 груш.

Задание 9 Обязательно ли среди двадцати пяти "медных" монет (т.е. монет достоинством 1, 2, 3, 5 коп.) найдётся семь монет одинакового достоинства?

Задание 10 Сто человек сидят за круглым столом, причём более по-

ловины из них – мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

Задание 11* Комиссия из 60 человек провела 40 заседаний, причем на каждом заседании присутствовало ровно 10 человек. Докажите, что найдутся как минимум 2 члена комиссии, которые встречались дважды.

Формула размещений

Задание 12 Найдите количество вариантов рассадить 5 конкретных игроков по трем конкретным стульям. (затем выразите ответ в факториалах)

Задание 13 Найдите количество вариантов расставить 17 конкретных кеглей на 12 конкретных мест, ответ запишите в виде факториала.

Задание 14 Найдите количество 6-ти значных чисел, цифры не повторяются, 0 не используется.

Задание 15 Запишите формулу размещений (A_n^k). Приведите пример задачи.

Формула перестановок

Задание 16 Сколько пятизначных чисел содержат все цифры: 5, 4, 3, 2, 1.

Задание 17 Найдите количество 9-ти значных чисел, в которых встречаются все цифры от 1 до 9.

Задание 18 Запишите формулу перестановок ($P_n = A_n^n$). Приведите пример задачи.

Формула перестановок с повторениями

Задание 19 Запишите формулу перестановок с повторениями

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k).$$

Задание 20 Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова «математика», «комбинаторика», «парабола», «ингредиент».

Задание 21 У мамы 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых мандарина и 4 одинаковых апельсина. Каждый день в течение 9 дней она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Задание 22* Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать одну правую, и одну левую перчатку

так, чтобы они были разных размеров?

Задание 23 Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать по одной карте каждой масти (их 4)?

Задание 24 Предыдущая задача + у вытянутых карт должен быть разный номинал.

Задание 25 Сколько пятизначных чисел содержат все цифры 1, 2, 3, 4, 5? А сколько 0, 2, 4, 6, 8?

Задание 26 Найдите сумму цифр всех шестизначных чисел, которые могут получиться из цифр 1, 1, 3, 5, 3, 1

Домашнее задание:

ДЗ №(0 → 1) Вычислить: а) $6!$ б) $1!$ в) $\frac{10!}{7!}$ г) $\frac{6! \times 9!}{8! \times 5!}$

ДЗ №2 В классе учатся 38 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, родившихся в один месяц.

ДЗ №3 В ящике лежит 28 красных шариков, 20 зеленых, 12 желтых, 20 синих, 10 белых и 10 черных. Сколько минимально шариков надо взять, чтобы среди них оказалось 15 шариков одного цвета?

ДЗ №4 Скольким количеством способов можно выбрать 7 конкретных оппозиционеров из толпы в 100 человек?

ДЗ №5 Сколько слов можно составить из слова а) «балбес», б) «ай-тишники» в) «лицеистик» г) «караганда».

ДЗ №6 Сколько есть способов рассадки 21 ученика на 21 место.

ДЗ №7 Сколько есть способов рассадки 21 ученика на 10 мест. И каждому ученику важно, где он сидит!

2.3 Комбинаторные формулы часть 2

Повторение:

Задание 1 а) $2!$ б) $0!$ в) $3! \cdot 2!$ г) $6! - 4!$

Задание 2 а) $\frac{5!}{2!}$ б) $\frac{4096! \cdot 797!}{799! \cdot 4095!}$

Задание 3 Сколько слов, содержащих ровно 6 букв, можно составить из букв русского алфавита так, чтобы рядом друг с другом не стояли одинаковые буквы?

Задание 4 Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего необходимо выбрать по одному каждого рода. сколькими способами это

можно сделать?

Задание 5 На вершину горы веден 5 дорог. Сколькими различными способами турист может подняться на гору и спуститься с нее?

Задание 6 В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек. Сколькими способами они могут накрыть стол на них троих для чаепития (каждому по ложке, блюдцу и чашке)?

Задание 7 Сколькими способами можно выбрать из 9 кандидатов председателя, заместителя и секретаря?

Задание 8 Сколько нечетных и сколько четных четырехзначных чисел можно получить из цифр 3, 6, 9, 4?

Задание 9 Найдите количество различных слов, которые можно составить из букв слова "КАРАГАНДА".

Задание 10 У человека на голове не более 300000 волос. Докажите, что в Москве живут не менее 10 человек с одинаковым количеством волос. В Москве проживает больше 6 млн человек.

Задание 11 Мама очень любит Костю. Поэтому каждый день она дает ему один из фруктов, которые она купила на неделю. Известно, что на следующую неделю мама купила 3 яблока, 2 банана и 2 апельсина. Сколькими различными способами мама может покормить Костю в каждый из дней?

Формула размещений с повторениями

Задание 12 Пусть число букв на каждой диске равно 12, а число дисков равно 5. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова и подбирающим его наудачу?

Задание 13 Сколько пятизначных чисел может быть составлено из цифр 1, 2, 4, 6? Цифры в записи могут повторяться.

Формула сочетаний без повторений

Задание 14 Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из 5 различных красок.

Задание 15 В классе 40 человек. Сколькими способами можно выбрать 12 человек в футбольную команду.

Задание 16 В классе 40 человек. Сколькими способами можно выбрать 12 человек в каждую из двух футбольных команд.

Задание 17 Мальчик выбирает 7 различных футболок из 25 различных футболок. Сколько существует способов их выбрать.

Задание 18* Сколько чисел можно составить из цифр числа 3694, используя каждую цифру 1 раз? А из 369433994?

Задание 19 В классе 21 человек. Необходимо назначить 4 дежурных. Сколькими способами это можно сделать?

Задание 20 Задача 19 + один из дежурных должен быть Поляков.

Задание 21 В театре помещается 100 человек, а желающих попасть больше. Поэтому в театре ввели ограничения. Из 40 студентов они готовы принять только 20. Из 50 беременных женщин – только 30. Из 50 одиноких мужчин только 20. А на оставшиеся места готовы выбрать из 100 детей необходимое количество. Найдите количество способов выбрать посетителей театра.

Формула сочетаний с повторениями

Задание 22 Докажите формулу сочетаний с повторениями: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Задание 23 В почтовом отделении подаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить 8 открыток? Сколькими способами можно купить 12 открыток? Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

Задание 24 Сколькими способами можно нарисовать треугольники, каждая из сторон которого принимает значения 4, 5, 6 или 7?

Задание 25 Сколько можно нарисовать различных прямоугольных параллелепипедов, если длина ребер составляет целое число от 1 до 10?

Задание 26 Выпишите схему решения комбинаторных задач! И выучите ее.

2.4 Бином Ньютона & Комбинаторные тождества

№1 Докажите формулу сочетаний с повторениями: $\overline{C}_k^n = C_{n+k-1}^k$

№2 В классе 36 человек, из которых 6 – отличники. Сколькими способами можно разбить класс на два класса по 18 человек так, чтобы отличников в каждом классе было поровну?

№3 Сколькими способами можно разложить 5 выигрышных билетов по 10 коробкам? Все выигрышные билеты считаются одинаковыми.

№4 В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми участниками должна быть сыграна одна партия?

№5 Скольким количеством способом можно выбрать 5 -ти элементное подмножество 15 - элементного множества?

№6 В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены одинаковые призы?

№7 Выпишите бином Ньютона для $(a + b)^2$

№8 Выпишите бином Ньютона для $(a - b)^3$

№9 Выпишите и докажите бином Ньютона в общем случае.

№10 Найдите сумму: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n =$

№11 Найдите сумму: $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n =$

№12 Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$

№13 Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

№14 Найдите сумму: $C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^n = ?$ где n - четное число

№15 Найдите сумму: $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots =$

№16* Докажите, что $C_n^n + C_n^{n+1} + C_n^{n+2} + C_n^{n+3} + \dots + C_n^{n+m} = C_{n+m}^{n+1}$

№17 Найдите произведение: $C_n^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot \dots \cdot C_1^1 =$

№18 Сколько различных КНФ можно составить для функции 4-х переменных?

№19 Какое количество слагаемых в общем виде многочлена Жегалкина от функции с пятью переменными?

2.5 Продвинутая теория множеств

№1 Выпишите формулу включений и исключений в общем виде. Докажите ее для 2-х и 3-х множеств.

№2 $A = \{\text{множество четных, дву- и трех- значных чисел}\}$

$B = \{\text{множество трехзначных чисел, кратных 10}\}$

Вычислите: а) $A \cup B$ б) $A \cap B$ в) $A \triangle B$ д) $A \setminus B$

№3 Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек - фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?

№4 В детском саду 52 ребенка. Каждый из них любит пирожное или

мороженое. Половина детей любит пирожное, а 20 человек - пирожное и мороженое. Сколько детей любит мороженое?

№5 Все мои подруги выращивают в своих квартирах какие-нибудь растения. Шестеро из них разводят кактусы, а пятеро — фиалки. И только у двоих есть и кактусы и фиалки. Угадайте, сколько у меня подруг?

№6 Сколькими способами можно расселить 20 туристов по 5 домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым?

№7 В комнате площади 6 уложены три ковра площади 3 каждый (форма комнаты и ковров произвольная). Докажите, что какие-то два из этих трёх ковров перекрываются по площади, не меньшей 1.

№8 Выпишите строгие определения бинарных отношений.

№9 Докажите, что: (а) $A \cup B = B \cup A$ (б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(в) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (г) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

№10 Решите уравнение: $B \cap X = A$ and $B \cup X = C$ and $A \subset B \subset C$ относительно X .

№11 Вспомните, что такое счетное множество. Что такое континуальное множество?

№12 Докажите счетность натуральных и целых чисел, их равно-мощность.

№13 Докажите счетность рациональных чисел.

№14 Докажите несчетность бесконечных последовательностей из 0 и 1.

№15 Докажите континуальность интервала $[0; 1)$

№16 Докажите континуальность действительных чисел.

2.6 Математическая индукция

Задание 1 Докажите, что сумма первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$

Задание 2 Докажите, что сумма кубов первых n натуральных чисел равна $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Задание 3 Докажите формулу: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Задание 4 Докажите формулу: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

Задание 5 Докажите формулу: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) =$

$$n(n+1)^2$$

Задание 6 Докажите формулу: $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

Задание 7 Докажите формулу: $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{7^n} = \frac{7^n - 1}{6 \cdot 7^n}$

Задание 8 Найдите сумму: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = ?$

Задание 9 Воспользовавшись математической индукцией, докажите истинность найденной суммы в предыдущем задании.

Задание 10 Докажите неравенство: $2^n > 2n + 1$; при $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$

Задание 11 Докажите неравенство: $2^n > n^2$; при $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 5$

Задание 12 Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16; при $n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 0$

Задание 13* Докажите, что $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6; При $n \in \mathbb{N}$.

Задание 14 Докажите, что $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$; при $n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$.

Задание 15 Докажите, что $(1 - \frac{1}{4}) \times (1 - \frac{1}{9}) \times (1 - \frac{1}{16}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$; при $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$.

Глава 3

Теория графов

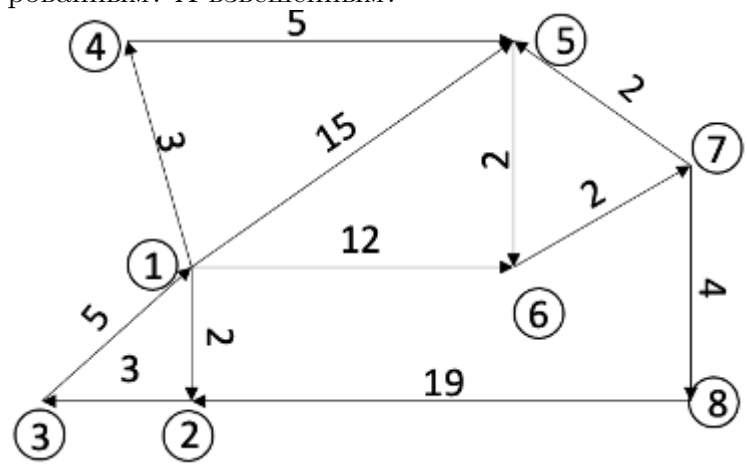
3.1 Понятие графа & Степень вершины

№1 Запишите определение математического объекта граф.

№2 Что такое ориентированный, взвешенный, связный и планарный граф. Приведите примеры.

№3 Что такое таблица смежности графа, как по таблице построить граф и обратно. Приведите пример.

№4 Как по таблице смежности понять, что граф является ориентированным? А взвешенным?



Граф 1

№5 Классифицируйте Граф 1.

№6 Что такое цикл в графе? Найдите самый большой цикл в Граф 1

и выпишите его.

№7 Выпишите таблицу смежности Граф 1

№8 Придумайте свой граф и для него выполните предыдущие 3 задания.

№9 Приведите пример непланарного графа

№10 Найдите количество ребер в полном графе на 5 (на n) вершинах

№11 Что такое степень вершины графа?

№12 Степень каждой вершины графа на 10 вершинах равна 7. Сколько ребер в данном графе?

№13 В городе М. 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

№14 (Теорема о сумме степеней вершин) Докажите, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер.

№15 (Лемма о рукопожатиях) Докажите, что любой граф содержит четное число нечетных вершин.

№16 В стране С. 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой.

№17 В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

№18 В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

№19 Вспомните определение клики. Нарисуйте K_4 и K_5 .

№20 Что такое двудольный граф. Приведите пример двудольного графа.

№21 Какое максимальное количество ребер в графе $K_{m,n}$ – двудольном графе на m и n вершинах.

№22 (Теорема о четном цикле в двудольном графе) Докажите, что цикл в двудольном графе всегда будет проходить по четному количеству ребер.

№23 Существуют ли графы, степени вершин которых равны (Обоснуйте свой ответ):

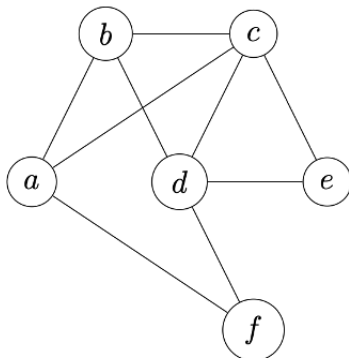
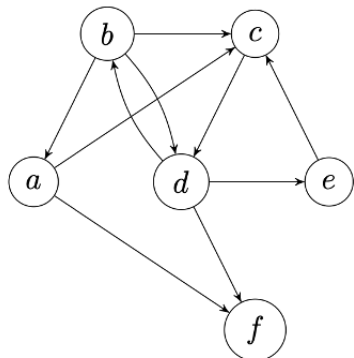
А) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 Б) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3

В) 4, 4, 4, 4, 4 Г) 4, 4, 4, 2, 2 Д) 4, 4, 4, 2

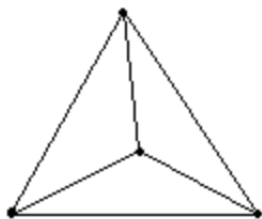
№24 Сколько ребер в полном графе K_7 и в $K_{3,5}$?

№25 Можно ли сделать граф K_5 или граф $K_{3,3}$ планарным?

№26 Классифицируйте графы ниже и найдите в них самый длинный цикл.



№27 Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?



№28 Докажите, что число штатов США с нечётным числом соседей чётно.

№29 Докажите, что если степень каждой вершины четна, то весь граф можно обойти одним циклом.

№30 На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

3.2 Циклы, пути и раскраски

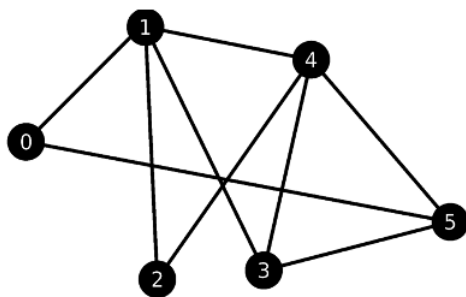
№1 В банке работают 100 человек. Может ли быть так, что 43 имеют по 13 друзей, 19 по 18 друзей, 20 по 25 друзей, а оставшиеся имеют по 7 друзей?

№2 В стране Р. 6 городов. Между этими городами построены дороги. Посчитали количество дорог и оказалось, что их 17. Возможно ли такое?

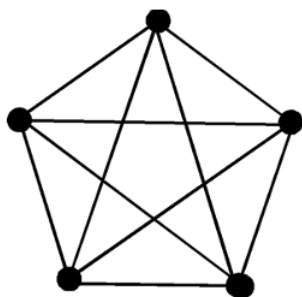
№3 Вспомните определение клики. Нарисуйте K_4 и K_5 , K_6 . Они планарные?

№4 Что такое цикл, что такое путь? В чем различия? Нарисуйте граф и выпишите наибольший путь, наибольший цикл.

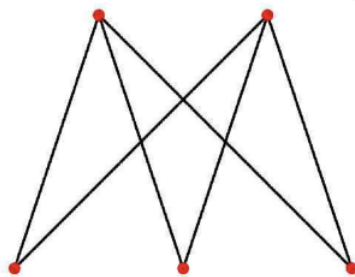
№5 Что такое Эйлеров путь/цикл? (ребра) Попробуйте найти Эйлеров цикл в приведённых графах. Является ли граф Эйлеровым (опр)?



Граф 1.



Граф 2.



Граф 3.



Граф 4.

№6 Существует ли в них Эйлеров путь?

№7 Сформулируйте критерий Эйлеровости графа и докажите.

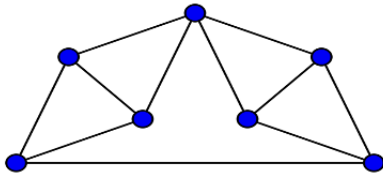
№8 Что такое Гамильтонов путь/цикл? Что такое Гамильтонов граф?

№9 Графы 1 – 4 гамильтоновы?

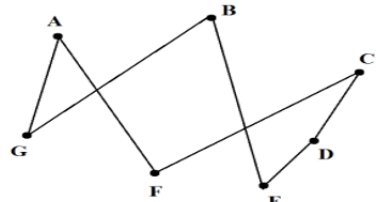
№10 Приведите пример гамильтонова графа на >4 вершинах.

№11 Приведите пример полного гамильтонова графа.

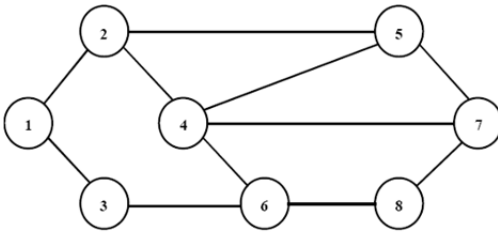
Th (Признак Дирака) Если в связном графе с n вершинами, степень любой вершины $\geq n/2$, то этот связный граф — гамильтонов.



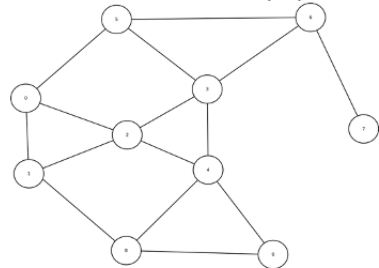
Граф 5



Граф 6



Граф 7



Граф 8

№12 Определите, являются ли графы Эйлеровыми. Докажите.

№13 Определите, являются ли графы Гамильтоновыми. Докажите.

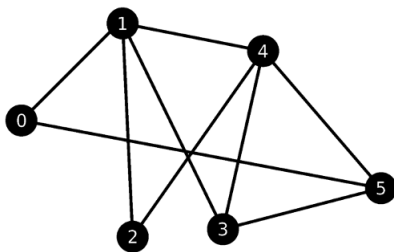
№14 Есть ли в них Эйлеров путь? Если есть, то какой из них наибольший?

№15 Приведите пример графа с Эйлеровым путем, но без Эйлерова цикла.

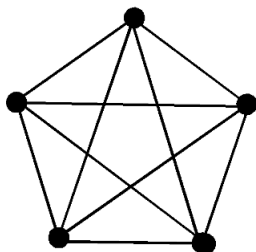
3.3 Раскраски графов

Задание 1 Что такое вершинная раскраска графа? Что такое хроматическое число $\chi(G)$ графа?

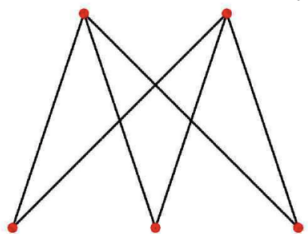
Задание 2 Попробуйте раскрасить приведенные ниже графы в минимальное кол-во цветов.



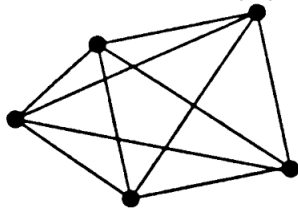
Граф 1.



Граф 2.



Граф 3.



Граф 4.

Задание 3 Что такое кликовое число ($\omega(G)$), число независимости ($\alpha(G)$)?

Задание 4 а) Нарисуйте дополнение графа 3. б) Графа 2. Что не так?

Задание 5 Докажите: $\chi(G) \geq \omega(G)$ и $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$

Задание 6 Докажите: $\alpha(G) = \kappa(\overline{G})$

Задание 7 Докажите, что граф двудольный ттт (\Leftrightarrow), когда $\chi(G) \leq 2$

Задание 8 Граф двудольный \Leftrightarrow все циклы нечетны.

Задание 9 Пусть $\Delta(G)$ - наибольшая степень вершины графа G . Тогда справедливо: $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Задание 10 В тридевятом царстве 100 городов, соединенных дорогами. Известно, что из города А по дорогам нельзя добраться до города В. Какое максимальное число дорог может быть в тридевятом царстве?

Задание 11 Докажите, что в любой компании из 6 человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Задание 12 Ученик нарисовал правильный многоугольник и провел в нем все возможные ребра. Может ли быть так, что число вершин многоугольника делится на 13, а число ребер - не делится?

Задание 13 Любой ли связанный граф можно нарисовать, не от-

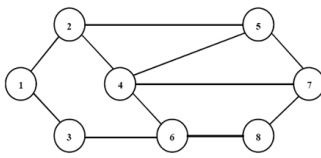
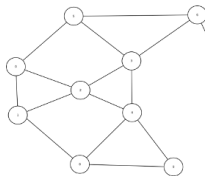
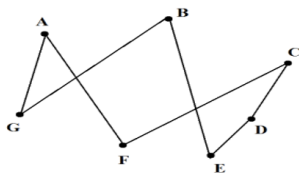
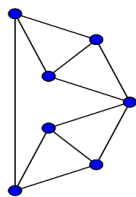
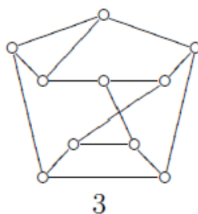
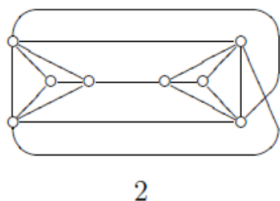
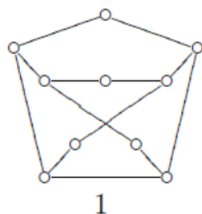
рывая карандаша, если по каждому ребру разрешается проходить ровно по два раза?

Факт Жадный алгоритм раскраски вершин: выбирается нумерация вершин, а потом каждая вершина, начиная с первой, красится в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.

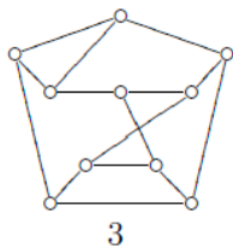
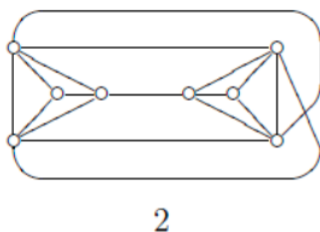
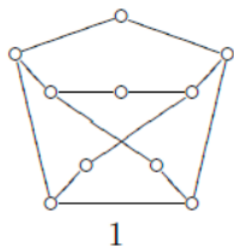
Задание 14 Покрасьте жадным алгоритмом графы 1 - 4.

Задание 15 На какое число может измениться хроматическое число графа, если добавить к графу одно ребро?

Задание 16 Для графов ниже вычислите хроматическое число, кликовое число, число независимости. Определите, сколькими цветами можно жадно раскрасить графы, как их нужно пронумеровать для оптимальной раскраски? А для самой неэффективной раскраски?



3.4 Деревья и кодирование



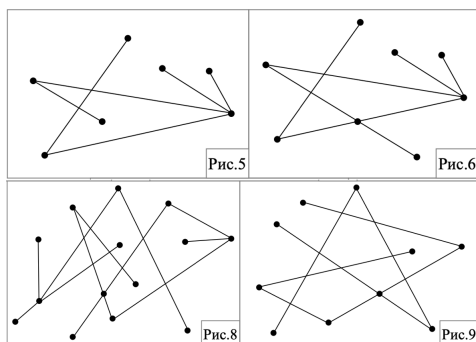
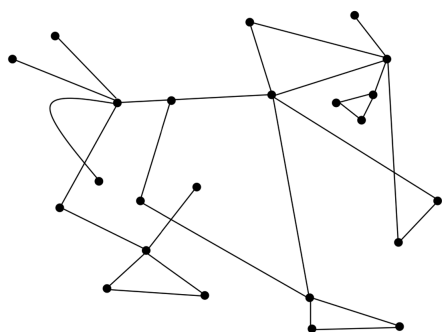
№1 Являются ли графы Эйлеровыми, Гамильтоновыми, докажите.

№2 Найдите хроматические числа графов.

№3 Нарисуйте дополнение графа 2.

№4 Что такое дерево? Являются ли графы 1-3 деревьями? Приведите пример дерева.

№5 Удалите минимальное кол-во ребер, чтобы сделать из графа дерево:



№6 Что такое висючая вершина? Нарисуйте дерево, степень каждой невисючей вершины должна быть 3, остальные вершины – висючие.

№7 Докажите, что в любом дереве вершин на одну больше, чем ребер.

Дерево – минимальный связанный граф на n вершинах. (с $n - 1$ ребром)

№8 В графстве 100 городов и 100 дорог (каждая дорога связывает какие-то два города). Докажите, что есть кольцевой маршрут по этим дорогам.

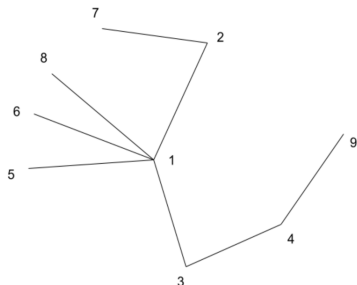
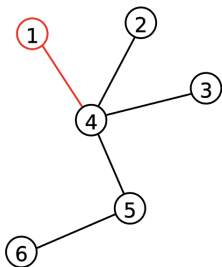
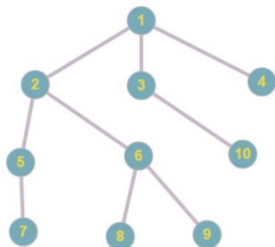
№9 В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ре-

монт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?

№10 В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

№11 Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было бы пройти из любой вершины в любую?

№12 Дайте определение Кода Прюфера. Постройте код Прюфера:



№13 Нарисуйте граф с максимальным количеством ребер на 8 вершинах. Постройте по нему код Прюфера.

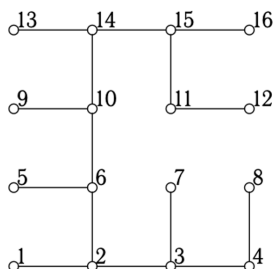
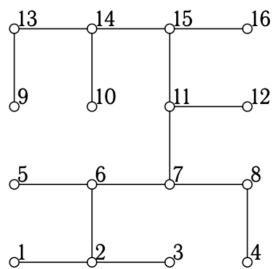
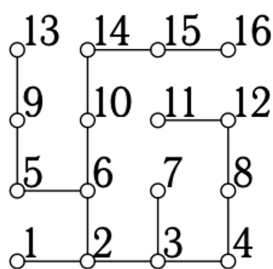
№14 Придумайте задачу, использующую код Прюфера.

№15 Восстановите дерево по коду Прюфера 1, 2, 2, 2, 1, 1

№16 Восстановите дерево по коду Прюфера (2, 4, 4, 4); (1, 1, 2, 5, 4, 2, 7)

№17 Восстановите дерево по коду Прюфера (7, 1, 5, 4, 3) и проверьте.

№18 Постройте код Прюфера по дереву:



№19 Постройте дерево по Коду Прюфера:

A) (6,3,4,5,10,7,8,9,10,15,12,13,14,15,20,16,17,18,19,20,25,23,24)

B) (2,3,4,3,8,6,11,9,8,13,16,17,18,19,20,21,22,17,18,19,20,25,24)

C) (6,7,3,8,10,11,12,8,13,15,16,13,18,19,20,21,18,19,22,23,24,19,20)

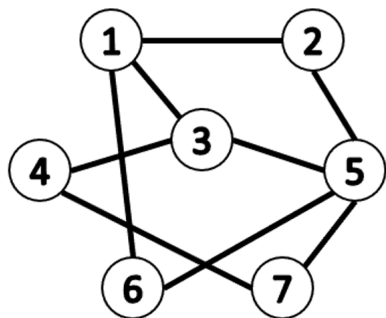
3.5 Планарность графов и итог

№1 Найдите количество различных деревьев на n вершинах.

№2 В посольстве некоторые гости обменялись рукопожатиями. Докажите, что число дипломатов, пожавших нечетное количество рук — чётно.

№3 В соревнованиях по «горячей картошке с вилками» участвовали русские и грузинские атлеты, русские начинали. Каждый раз они передавали картошку атлетам из другой страны, предварительно воткнув в нее вилку. После завершения игры, в картошке было четное число вилок. У атлета какой страны финишировала картошка?

№4 Два упрянца решили проехать по великой стране, карта которой изображена ниже. Один ехал так, чтобы не посещать один город два раза, второй так, чтобы не проезжать по одной дороге два раза. Тем не менее первый проехал все города, а второй все дороги. Начал и закончил каждый свой путь в том же городе. Врет ли кто-то из них, или нет? Докажите.



№5 Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×200 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

№6 Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдётся замкнутая ломаная из красных отрезков.

№7 Может ли полный граф иметь 20, 30, 40 ребер? Докажите.

№8 Докажите, что в дереве будет как минимум две вершины одинаковой степени. (Принцип Дирихле Вам в помощь)

№9 Нарисуйте произвольное дерево на 7 вершинах. Какое у него хроматическое число? Докажите свою правоту.

№10 Если в графе есть клика (полный подграф) на n вершинах, чему минимально(и максимально) может равняться хроматическое число.

Формула Эйлера планарного графа: $n + f - e = 2$

№11 Нарисуйте планарный граф и проверьте формулу Эйлера.

№12 Докажите упрощенный критерий Понтрягина-Куратовского (K_5 , $K_{3,3}$ – непланарные)

№13 Докажите, что если в графе есть непланарный подграф, то граф непланарен.

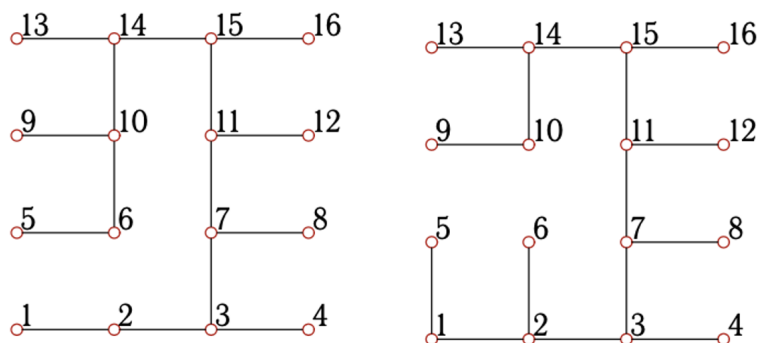
№14 С помощью Формулы Эйлера найдите количество граней у дерева.

№15 Сколько деревьев можно нарисовать на 7 вершинах. А на n вершинах?

№16 Сколько деревьев можно нарисовать, используя ребра и вершины K_5 ? А K_n ?

№17 Докажите формулу Кэлли.

№18 Постройте Код Прюфера:



№19 Постройте дерево по Коду Прюфера:

А) 5, 6, 4, 8, 9, 8, 7, 13, 9, 5, 6, 7, 11, 15

В) 2, 4, 3, 9, 11, 13, 9, 5, 1, 2, 3, 7, 11, 15

3.6 Дополнительные главы

№1

№2

№3

№4

№5

№6

№7

№8

№9

№10

№11

№12

№13

№14

№15

№16

№17

№18

№19