

УДК 519.853.62

**Нижние оценки для задач децентрализованной оптимизации при
константном ограничении на изменение ребер за итерацию в
коммуникационной сети**

Д.С. Метелев¹

¹Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)

В данном исследовании мы подробно рассматриваем проблему децентрализованной оптимизации, в которой каждый агент обладает сильно выпуклой и гладкой функцией, а целью сети является минимизация суммы всех функций по узлам. Эту задачу можно рассматривать как в статической Scaman et al. [2017], так и в изменяющейся сети Kovalev et al. [2021]. В обоих случаях существуют оптимальные алгоритмы, нижние границы которых выражаются через χ , число обусловленности сети.

Недавние исследования Metelev et al. [2022] выявили нижние границы для задачи децентрализованной оптимизации при различных асимптотических ограничениях на скорость изменения сети. Мы показываем, что при константных ограничениях нижние границы такие же, как и в случае изменяющейся во времени сети, улучшая тем самым существующие результаты.

Основная идея установления этих нижних границ заключается в построении контрпримера временно-изменяющейся сети, в которой информация медленно передается от одного большого кластера к другому, сохраняя при этом скромное число обусловленности сети. В предыдущих исследованиях это достигалось путем использования классических (невзвешенных) графов Лапласа, соответствующих сети. Для оценки числа обусловленности графа необходимо оценить как наибольшее, так и наименьшее положительные собственные значения Лапласиана. В то время как наибольшее собственное значение можно легко оценить, сложности возникают при определении наименьшего положительного собственного значения.

В нашем новом подходе мы используем взвешенный Лапласиан для построения матричного контрпримера, позволяя нам использовать ранее недоступные топологии с предыдущей методологией. Взвешенный Лапласиан позволяет нам настроить веса ребер таким образом, что наименьшее собственное значение можно легко оценить, одновременно сохраняя контроль над наибольшим собственным значением.

В итоге, наше исследование, благодаря новому подходу, улучшает существующие оценки и закрывает открытую проблему о том, насколько можно быстро решать децентрализованную задачу оптимизации на изменяющейся во времени сети при сильных ограничениях на скорость ее изменения.

References

Kevin Scaman, Francis Bach, Sébastien Bubeck, Yin Tat Lee, and Laurent Massoulié. Optimal algorithms for smooth and strongly convex distributed

optimization in networks. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning-Volume 70*, pages 3027–3036. JMLR. org, 2017.

Dmitry Kovalev, Elnur Gasanov, Alexander Gasnikov, and Peter Richtarik. Lower bounds and optimal algorithms for smooth and strongly convex decentralized optimization over time-varying networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34, 2021.

Dmitriy Metelev, Alexander Rogozin, Alexander Gasnikov, and Dmitry Kovalev. Decentralized saddle-point problems with different constants of strong convexity and strong concavity. *arXiv preprint arXiv:2206.00090*, 2022.