

Оптимизация стратегии эксперимента измерения массы аксиона с помощью информации Фишера

Викентьев Михаил Ильич

Физтех-школа прикладной математики и информатики, МФТИ
Научный руководитель: Пальмин Владимир Сергеевич

23 мая, 2023

Актуальность и цель работы

Актуальность проблемы оптимизации стратегии времени обоснована растущей стоимостью и продолжительностью физических экспериментов. Использование информации Фишера для оптимизации может не только уменьшить ошибку измерения в условиях ограниченного времени, но и определить некоторые данные как пренебрежимо мало влияющие на результат.

Цель работы – найти оптимальную стратегию времени для эксперимента.

Описание эксперимента

Аксион - гипотетическая элементарная частица и кандидат на роль компонента холодной темной материи. Выяснено, что под действием сильного магнитного поля аксионы могут превращаться в фотоны. Таким образом гелиоскоп может регистрировать количество обнаруженных фотонов, выражаемое формулой:

$$N_\gamma = St \int dE_a \varepsilon_D(E_a) \varepsilon_T(E_a) \frac{d\Phi_P}{dE_a} P_{a \rightarrow \gamma}(E_a),$$

где $P_{a \rightarrow \gamma}(E_a)$ - вероятность превращения аксиона в фотон, зависящая от массы аксиона. Таким образом измеряемая величина представима в виде $T * \mu(E_a, \theta)$, где θ - параметр, в данном случае масса, T - время измерения, E_a - энергия.

Матрица информации Фишера

Матрица информации Фишера (FIM) - понятие, являющееся аналогом информации Фишера в случае, если параметр θ является вектором:

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(\theta)]_{ij} &= E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(X; \theta) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \log L(X; \theta) \right) \mid \theta \right] = \\ &= \sum_k \left(\int \frac{\partial \log P_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log P_k}{\partial \theta_j} P_k d\mu_k \right) = \sum_k T_k \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial \mu_k}{\partial \theta_j} \frac{1}{\mu_k} \end{aligned}$$

Из неравенства Крамера-Рао матрица ковариации оценки $\Sigma \leq \mathcal{I}^{-1}$, и если эффективная оценка существует, то для нее $\Sigma = \mathcal{I}^{-1}$.

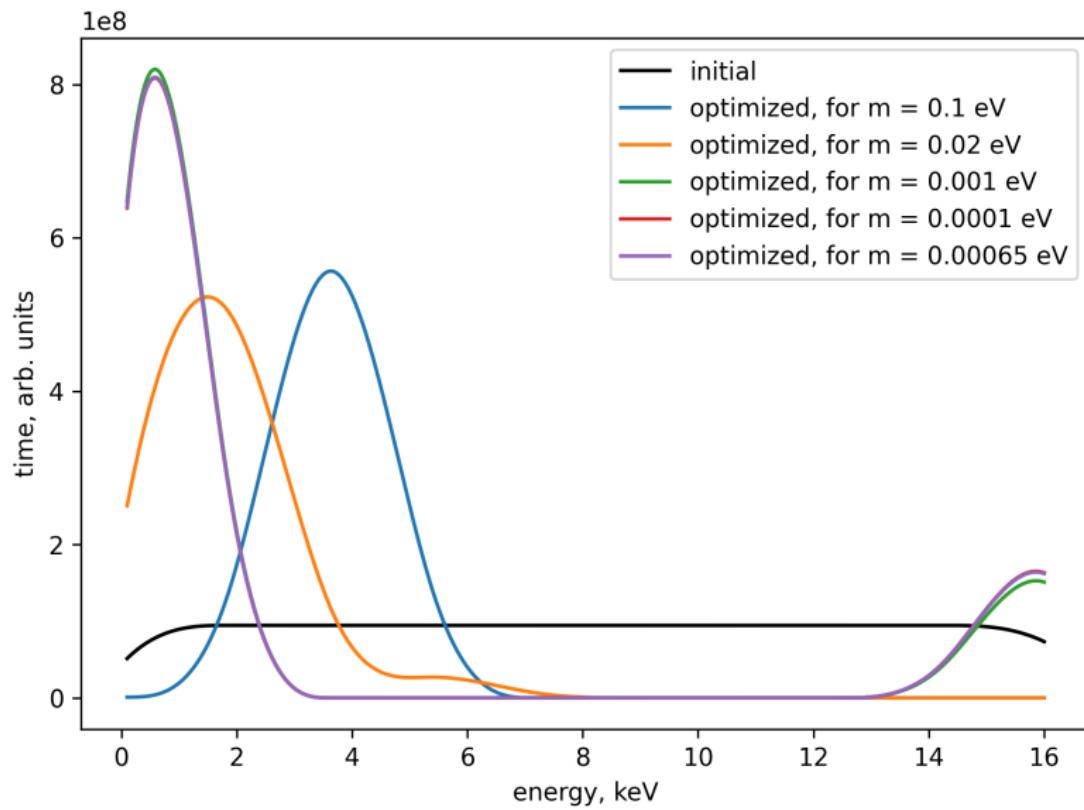
Варианты оптимизации

Стратегия времени T - гладкая функция, поэтому ее разумно разложить на базис из кубических B-сплайнов. Тогда задача оптимизации сводится к оптимизации весов базиса.

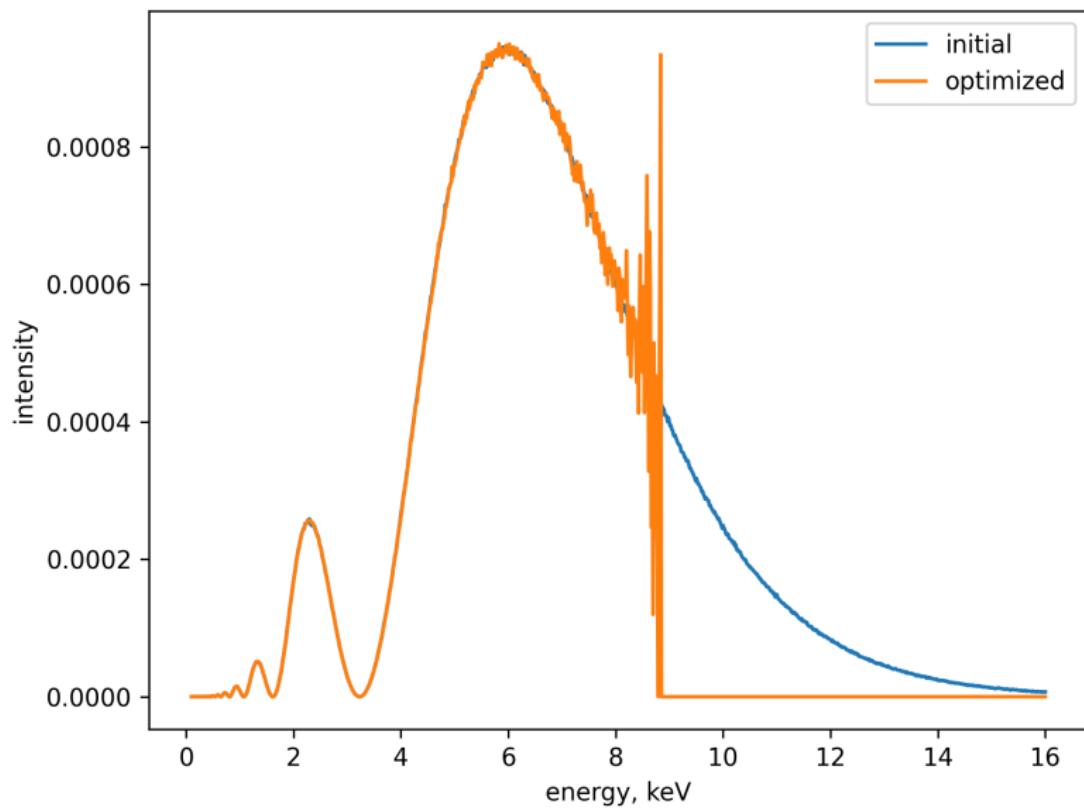
Существует 3 основных варианта оптимизации:

- ① Минимизация дисперсии одного целевого параметра, эквивалентная в случае данного эксперимента минимизации $\sqrt{\mathcal{I}_{0,0}^{-1}}$
- ② Минимизация общей дисперсии параметров, эквивалентная минимизации $\sqrt{\text{tr } \mathcal{I}^{-1}}$ (A-optimal design)
- ③ Минимизация объема общего доверительного интервала параметров, эквивалентная минимизации $\det \mathcal{I}^{-1}$ (D-optimal design)

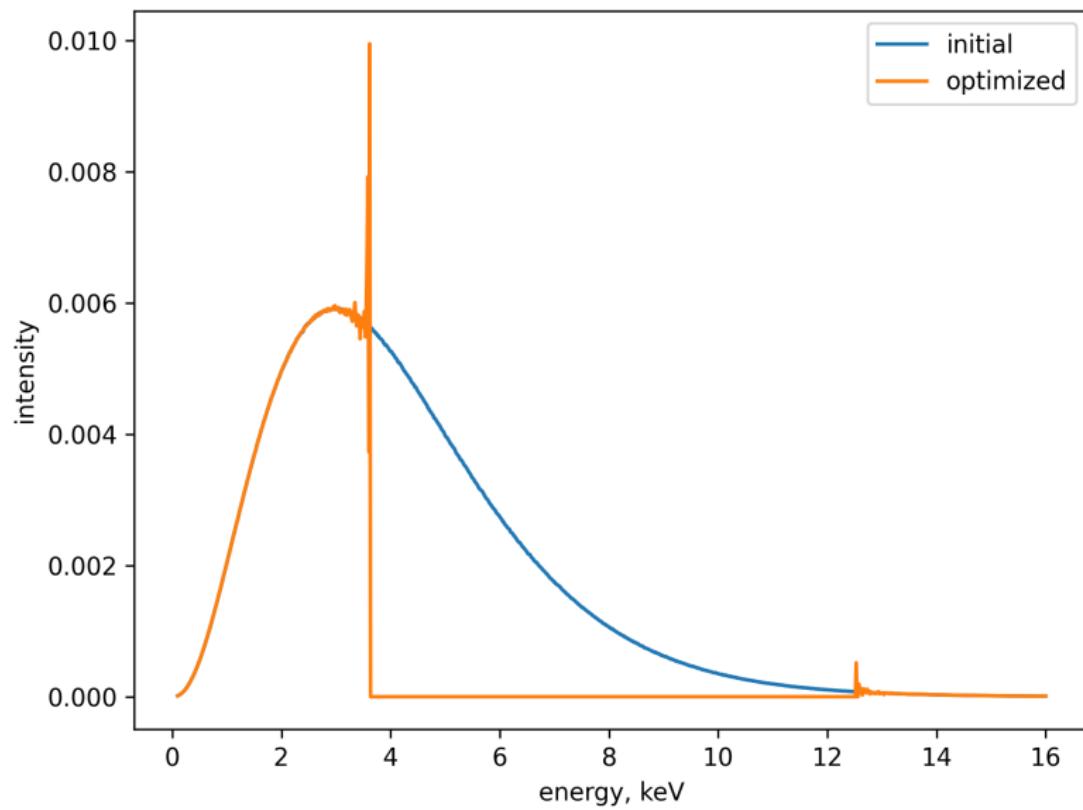
Оптимальные стратегии времени для разных значений m



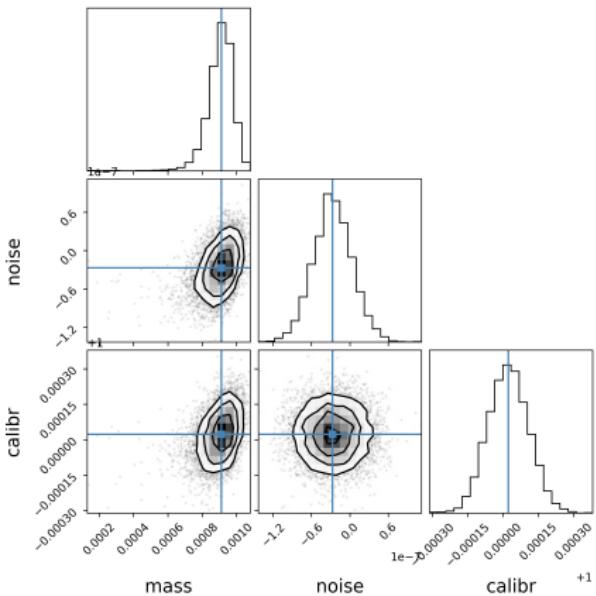
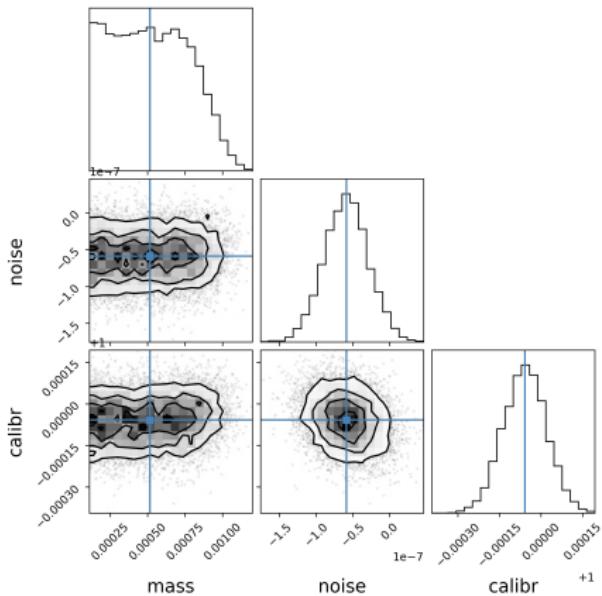
Применение стратегии, $m = 0.02$ eV



Применение стратегии, $m = 0.001$ eV

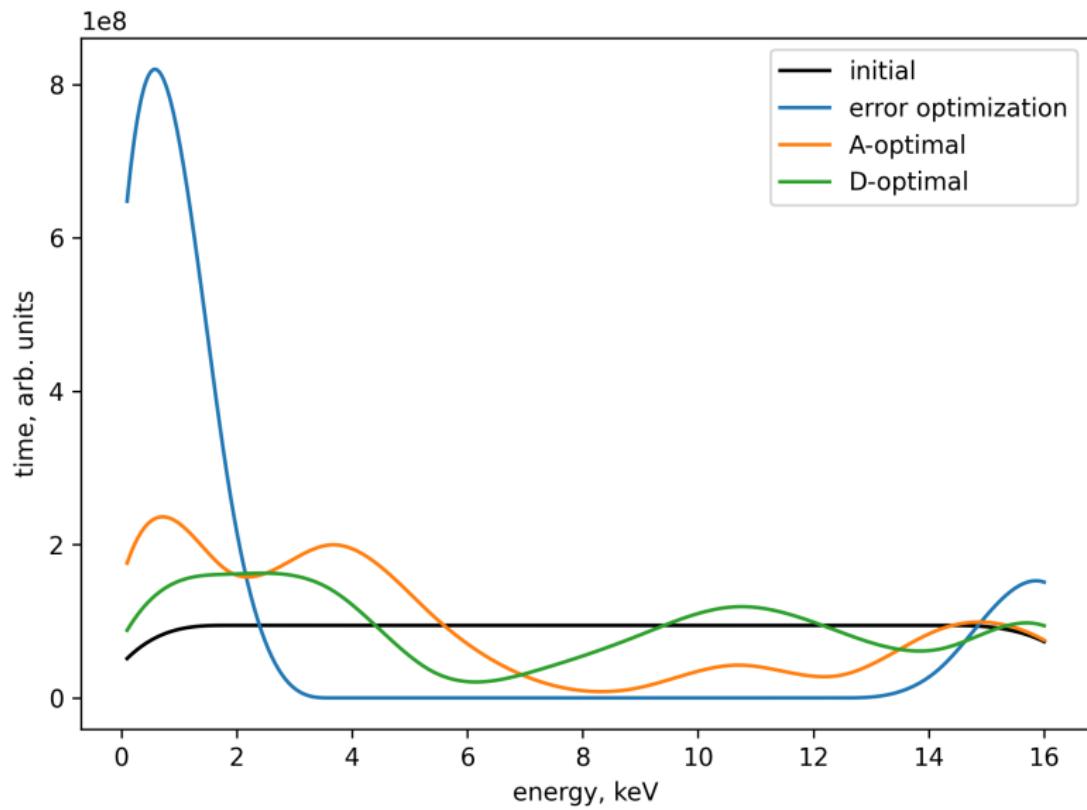


Пространства параметров



Пространства параметров при изначальной (слева) и оптимальной (справа) стратегии для $m=0.001$

Различные оптимальные стратегии для $m = 0.001$ eV



Сравнение ошибок для $m = 0.001$ eV

Сравнение ошибок параметров между изначальной и оптимальной стратегиями:

Parameter	Initial	Optimal	Reduction
mass	$1,42 * 10^{-4}$	$4,85 * 10^{-5}$	2.916
noise	$3,048 * 10^{-8}$	$3,052 * 10^{-8}$	0,999
calibration	$8,03 * 10^{-5}$	$8,54 * 10^{-5}$	0,94

Сравнение ошибки целевого параметра и общей ошибки между различными стратегиями:

Strategy	Mass error	Errors' sum
Initial	$1,42 * 10^{-4}$	$1,63 * 10^{-4}$
Target optimisation	$4,85 * 10^{-5}$	$1,48 * 10^{-4}$
A-optimal	$1,18 * 10^{-4}$	$1,04 * 10^{-4}$
D-optimal	$1,1 * 10^{-4}$	$1,33 * 10^{-4}$

Список литературы

- Palmin, V. (2021). "Fisher Information-driven Optimal Experiment Design". A thesis submitted for the degree of Bachelor of Science, Moscow Institute of Physics and Technology
- Theopisti Dafni et al. (2019). "Weighing the solar axion". Physical Review D 99, 035037
- Yongsu Jung, Ikjin Lee. (2021). "Optimal design of experiments for optimization-based model calibration using Fisher information matrix". Reliability Engineering and System Safety 216, 107968