Векторный аналог задачи Монжа оптимальной транспортировки мер

Е. Веретенников

23 мая 2023 г.

Классическая постановка задачи Канторовича

Пусть заданы два вероятностных пространства $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ и неотрицательная $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримая функция $h: X \times Y \to \mathbb{R}$, которая называется *функцией стоимости*.
Обозначим через $\Pi(\mu, \nu)$ множество мер σ на $(X \times Y, \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y)$, имеющие проекции μ и ν, соответственно:

$$\sigma(A \times Y) = \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{B}_X, \ \sigma(X \times B) = \nu(B) \ \forall B \in \mathcal{B}_Y$$

Такие меры называются *транспортными планами*.
Классическая задача Канторовича состоит в минимизации функционала:

$$\int\limits_{X \times Y} h(x, y)\sigma(dxdy), \ \sigma \in \Pi(\mu, \nu)$$

Задача Монжа

$$K_h(\mu, \nu) = \inf_{\sigma \in \Pi(\mu,\nu)} \int\limits_{X \times Y} h(x, y)\sigma(dxdy)$$

Задача Монжа

$$K_h(\mu,\nu) = \inf_{\sigma\in\Pi(\mu,\nu)} \int\limits_{X\times Y} h(x,y)\sigma(dxdy)$$

Пусть $T : X \to Y$, $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Задача Монжа состоит в минимизации функционала:

$$M_h(\mu,\nu) = \inf_T \int\limits_X h(x, T(x))\mu(dx)$$

Связь задач Монжа и Канторовича

$$K_h(\mu, \nu) \leqslant M_h(\mu, \nu)$$

Во многих задачах достигается равенство.

Связь задач Монжа и Канторовича

$$K_h(\mu, \nu) \leqslant M_h(\mu, \nu)$$

Во многих задачах достигается равенство. Было установлено, что для непрерывной h, безатомарных μ и ν и суслинских X и Y есть равенство. Также оно достигается в случае радоновских сепарабельных мер на вполне регулярных пространствах (условие сепарабельности существенно).

Векторный аналог задачи Монжа

Для заданных безатомических вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_d$ на суслинском пространстве X, борелевской вероятностной меры ν на суслинском Y и "достаточно хороших" функций стоимости $h_1, \dots, h_d$ на $X \times Y$ минимизировать величину

$$\sum_{i=1}^{d} \int_X h_i(x, T(x))\mu_i(dx)$$

по борелевским $T : X \to Y$, переводящим каждую μ_i в ν.

Дискретный случай

Если $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu = \sum m_i \delta_{y_i}$, где $\sum m_i = 1$, $m_i \geqslant 0$, то

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\sum \delta_{y_i}(dy) \otimes \mu_i(dx) \mid \mu_i(X) = m_i,\ \sum \mu_i = \mu\}$$

Общий случай

Идея: приблизить ν дискретными $\nu^{(n)}$. Для каждой дискретной найти множество $\{T^{(n)}\}$, которые доставляют минимум в задаче Монжа. Найти предел множеств.

Общий случай

Идея: приблизить ν дискретными $\nu^{(n)}$. Для каждой дискретной найти множество $\{T^{(n)}\}$, которые доставляют минимум в задаче Монжа. Найти предел множеств.

Вопросы:

- Какой предел брать? Почему он существует?
- Почему предел удовлетворяет условиям задачи?

Литература

[1] В.И. Богачёв, *Задача Канторовича оптимальной транспортировки мер: Новые направления исследований*, 2022.
[2] G. Wolansky, *Optimal transport. A semi-discrete approach*, 2021.