Количество целых точек в области, ограниченной кривой

Е. А. Кириков
Б. З. Мороз

1. Постановка задачи
2. Методы
3. Частный случай
4. Литература

Постановка задачи

Пусть $f(x)$ неотрицательная непрерывная на $[a, b]$ функция. Требуется найти количество целых точек на множестве

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b] \wedge y \in (0, f(x)]\}$$

Обозначим это число за T. Очевидно, что

$$T = \sum_{a<x\leq b} [f(x)] = \sum_{a<x\leq b} f(x) - \sum_{a<x\leq b} \{f(x)\}$$

1. Постановка задачи
2. Методы
3. Частный случай
4. Литература

Theorem (Euler-Maclaurin): Пусть $f(x) \in \mathrm{C}^2[a,b]$. Определим

$$\rho(x) = 1/2 - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int\limits_0^x \rho(u)\mathrm{d}u$$

Then

$$\sum_{a<x\le b} f(x) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) -$$

$$-\sigma(b)f'(b) + \int\limits_a^b \sigma(x)f''(x)\mathrm{d}x$$

Две леммы

Lemma A: Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $0 < \Delta < 1/4$, $\Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta$. Тогда существует 1-периодическая функция $\psi(x)$ такая, что

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [\alpha + \frac{\Delta}{2}, \beta - \frac{\Delta}{2}] \\ \in (0,1), \ \text{в} \ (\alpha - \frac{\Delta}{2}, \alpha + \frac{\Delta}{2}) \cup (\beta - \frac{\Delta}{2}, \beta + \frac{\Delta}{2}) \\ 0, \ x \in [\beta + \frac{\Delta}{2}, 1 + \alpha - \frac{\Delta}{2}] \end{cases}$$

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{\mathbb{Z} \setminus \{0\}} g(m) e^{2\pi i m x}$$

$$|g(m)| \leq \min \left(\beta - \alpha, \frac{1}{\pi |m|}, \frac{1}{\pi |m|} \left(\frac{r}{\pi |m| \Delta} \right)^r \right)$$

Lemma B: Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_Q$ – действительные, $0 \le \delta_s < 1,\ s \in \overline{1, Q}$. Пусть $r \in \mathbb{N},\ 0 < \Delta < 1/8$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\Delta \le \beta - \alpha \le 1 - \Delta$; Функция $\psi(x)$ – функция предыдущей леммы, отвечающая заданным Δ, α, β, r. Если для любых α, β

$$\sum_{s=1}^{Q} \psi(\delta_s) = (\beta - \alpha)Q + O(R),$$

то

$$\sum_{s=1}^{Q} \delta_s = \frac{1}{2}Q + O(R) + O(\Delta Q)$$

$$\sum_{a<x\leq b} e^{2\pi i m f(x)}, \;\; m \neq 0$$

Пусть функция f удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ следующим условиям: существуют числа U, A

$$U \gg A \gg 1,\ 0 < b - a \leq U$$

такие, что

$$A^{-1} \ll f''(x) \ll A^{-1}$$

Пусть, кроме того, $|f'(x)| \leq \delta < 1,\ a \leq x \leq b$. Тогда

$$\sum_{a<x\leq b} e^{2\pi i f(x)} = \int\limits_a^b e^{2\pi i f(x)} \mathrm{d}x + O(\ln U)$$

Lemma (van der Corput) Пусть $|f'(x)| \geq \lambda > 0$ для всех $x \in [a, b]$ и пусть $f'(x)$ монотонна, тогда

$$\left| \int_a^b e^{2\pi i f(x)} \mathrm{d}x \right| \leq 3\lambda^{-1}$$

Будем оценивать модуль интеграла

$$\int_0^1 e^{2\pi i f(x)}\mathrm{d}x$$

Рассмотрим частный случай:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-1}x^{n-1}$$

Идея заключается в том, чтобы на множестве

$$E_{f'} = \{x \in [0,1] : |f'(x)| \leq A\}$$

оценить модуль интеграла тривиально – то есть мерой E, а оставшееся множество разбить на участки монотонности и применить на них лемму ван дер Корпута.

Можно показать, что

$$\mu(E_f) \leq \min\left(1, 4e(A\alpha^{-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)$$

где $\alpha = \max\limits_{i \in \overline{0, n-1}} |\alpha_i|$ Эта оценка во многом получается из рассмотрения системы

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 A \\ \vdots \\ \theta_n A \end{pmatrix}$$

Можно, однако, сместить номер достижения α в сторону старшей степени. Для этого нужно рассмотреть преобразование $x \mapsto cx$, где

$$c = \max\left(\max_{0\le j\le n-1}\left(\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n-1-j}}, 1\right)$$

В конце концов , это дает оценку

$$\mu \le 2e(A\alpha^{-1})^{\frac{1}{n-1}} c^{1-\frac{l}{n-1}}$$

Как видно, эта оценка лучше при $c^{1-\frac{l}{n-1}} < 2$, то есть при $c < 2^{\frac{n-1}{n-1-l}}$.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

причем

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n$$

Пусть $\{c_i\}_{i=0}^{n}$ таков, что $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$

$$p_k(x) = \sum_{i=k}^{n} c_i x^i$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{i} c_k \right) x^i$$

1. Постановка задачи
2. Методы
3. Частный случай
4. Литература

Литература

- Основы аналитической теории чисел, Карацуба А.Л., 1983.
- Chiche-Lapierre, V.: Van der Corput's Lemma in Number Theory and Analysis and its Applications to Abelian varieties with Prescribed Groups, 3–4 (2014)