Гибкость конусов на поверхностях дель Пеццо

И.Е.Климанова
под руководством А.Ю.Перепечко

28 марта 2023 г.

Транзитивность

Определение X – множество, G действует на X транзитивно, если $\forall x, y \in X\ \exists g \in G : g \cdot x = y$.

Определение X - множество, G действует на X m-транзитивно, если $\forall (a_1, \dots, a_m) \in X^m, a_i \neq a_j,\ \forall (b_1, \dots, b_m) \in X^m, b_i \neq b_j\ \exists g \in G$ такое, что $\forall i : g \cdot a_i = b_i$

Определение X – множество, G действует на X ∞-транзитивно, если G действует на X m-транзитивно для любого $m \in \mathbb{N}$.

Гибкость

Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики.

Определение Точка $p \in X$ называется гибкой, если касательное пространство T_pX порождено касательными векторами к орбитам действий аддитивной группы поля $G_a = G_a(K)$ на X. Все G_a-действия на X порождают специальную группу автоморфизмов $SAutX \subset AutX$

Определение Многообразие X называется гибким, если все гладкие точки на X гибкие, и обобщённо гибким, если существует открытое подмножество в X, состоящее из гибких точек.

Гибкость

Следующие условия эквивалентны для аффинного многообразия X размерности > 2:

1. многообразие X является гибким;
2. группа $SAutX$ действует транзитивно на подмножестве гладких точек $Xreg \subset X$;
3. группа $SAutX$ действует бесконечно транзитивно на $Xreg$.

Поверхность дель Пеццо

Поверхность дель Пеццо – поверхность, получаемая раздутием некоторого количества точек общего положения на $\mathbb{P}^2$.
Известно, что любую кубику в $\mathbb{P}^3$ можно получить раздутием в 6 точках. Такая кубика является поверхностью дель Пеццо степени 3.

Определение Открытое подмножество U нормального проективного многообразия называется цилиндром, если U изоморфно $\mathbb{A}^1 \times Z$ для гладкого многообразия Z с $Pic(Z) = 0$.

Теорема Если для какого-то очень обильного дивизора H на гладком проективном многообразии Y существует трансверсальное покрытие $H-$полярными цилиндрами, тогда аффинный конус $X = AffCone_H Y$ является гибким.

Полярность цилиндров на кубике Ферма

Будем изучать кубику Ферма $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$ в $\mathbb{P}^3$ и покрывать цилиндрами ее. Причем, хочется это уметь делать для любой поляризации.
Кубику можно получить раздутием шести точек $P_1, \ldots, P_6$ общего положения на $\mathbb{P}^2$. Заметим, что 27 прямых на кубике это исключительные кривые $E_1, E_2, \ldots, E_6$, образы прямых через пары точек, а также образы коник, проходящих через пять из шести точек.
Прямые, лежащие на кубике Ферма, имеют вид $[X : w_1 X : Y : w_2 Y], [X : Y : w_1 X : w_2 Y], [X : Y : w_2 Y : w_1 X]$, где w_1, w_2 – корни 3 степени из -1.

Полярность цилиндров на кубике Ферма

В данный момент благодаря такому представлению известна гибкость кубики для фиксированной поляризации, а именно для следующих исключительных кривых:

$$E_1 = \{wz_0 + z_1 = wz_2 + z_3 = 0\}$$

$$E_2 = \{z_0 + z_1 = z_2 + wz_3 = 0\}$$

$$E_3 = \{z_0 + wz_1 = z_2 + z_3 = 0\}$$

$$E_4 = \{z_0 + z_3 = z_1 + z_2 = 0\}$$

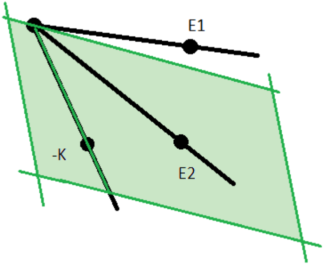
$$E_5 = \{z_0 + wz_3 = z_1 + wz_2 = 0\}$$

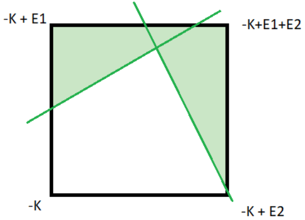
$$E_6 = \{wz_0 + z_3 = wz_1 + z_2 = 0\}$$

Конусы

Пусть H - класс Q-дивизоров внутри конуса Мори Y. Имеем, с точностью до порядка выбора из шести непересекающихся (-1) кривых $E1, \ldots, E_6$, что она принадлежит относительной внутренности одного из 14 типов конусов, которые явно описаны в [4].

Для примера возьмем конус типа $B_2 = Cone(-K, E_1, E_2)$.





Планы

Далее я буду пытаться покрывать все 14 типов конусов цилиндрами, проверять полярность которых буду с помощью модуля в sagemath от А.Ю.Перепечко.
Таким образом, ожидается получение гибкости не только для кубики Ферма, но и для поверхностей дель Пеццо степени три в общем случае.

Список литературы

[1] I. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Sbornik: Math 203 (2012), no. 7, 923–949.
[2] J. Park, J. Won. Flexible affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4. European Journal of Mathematics 2 (2016), no. 1, 304–318.
[3] A.Y. Perepechko. Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5. Functional Analysis and its Applications 47 (2013), no. 4, 284–289.
[4] A.Y. Perepechko. Affine cones over cubic surfaces are flexible in codimension one. Received July 18, 2020; revised November 3, 2020