УДК: 512.745.4

Гибкость конусов на поверхностях дель Пеццо степени 3

И.Е.Климанова[1], А.Ю.Перепечко[2]
[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
[2]Институут проблеем передаачи информаации иимени А.А.Харкеевича РАН

Известно, что кубика является поверхностью дель Пеццо степени 3. Поверхность дель Пеццо степень $d \leq 9$ получается раздутием $\mathbb{P}^2$ в $9-d$ точках.

Теорема Если для какого-то очень обильного дивизора H на гладком проективном многообразии Y существует трансверсальное покрытие $H-$полярными цилиндрами, тогда аффинный конус $X = AffCone_H Y$ является гибким. [3]

Все конусы на поверхностях дель Пеццо степени ≥ 4 являются гибкими. [1, 2, 3].

Однако, аффинный конус X над поверхностью дель Пеццо степени 3 относительно антиканонической поляризации не обладает G_a-действиями, хотя конус относительно любой другой очень обильной поляризации – обладает.

Прежде, чем изучать гибкость произвольной кубики, рассмотрим задачу в частном случае. Для этого возьмем кубику Ферма $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0$ в $\mathbb{P}^3$ и покроем цилиндрами ее.

Заметим, что любую кубику можно получить раздутием шести точек $P_1, \dots, P_6$ общего положения на $\mathbb{P}^2$. Кроме того, есть связь между 27 прямыми на кубике и нашими раздутиями, а именно, это будут исключительные кривые $E_1, E_2, \dots, E_6$, образы прямых через пары точек, а также образы коник, проходящих через пять из шести точек.

Это будут все прямые, задаваемые следующим образом:
$[X : w_1X : Y : w_2Y], [X : Y : w_1X : w_2Y], [X : Y : w_2Y : w_1X]$, где w_1, w_2 – корни 3 степени из -1.

В данный момент благодаря такому представлению известна гибкость кубики для фиксированной полярности [4], а именно для следующих исключительных кривых:

$$E_1 = \{wz_0 + z_1 = wz_2 + z_3 = 0\}$$

$$E_2 = \{z_0 + z_1 = z_2 + wz_3 = 0\}$$

$$E_3 = \{z_0 + wz_1 = z_2 + z_3 = 0\}$$

$$E_4 = \{z_0 + z_3 = z_1 + z_2 = 0\}$$

$$E_5 = \{z_0 + wz_3 = z_1 + wz_2 = 0\}$$

$$E_6 = \{wz_0 + z_3 = wz_1 + z_2 = 0\}$$

Пусть H - класс Q-дивизоров внутри конуса Мори Y. Имеем, с точностью до порядка выбора из шести непересекающихся (-1) кривых $E1, \ldots,_6$, что она принадлежит относительной внутренности одного из 14 типов конусов, которые явно описаны в [4].

Поэтому можно перейти к рассмотрению этих типов конусов и покрывать уже их. Для каждого сначала нужно найти семейство, которое дает на нем обобщенную гибкость, а также стоит отдельно для некоторых цилиндров проверить, полярны ли они внутри нашего конуса, и если да, то добавить в набор. После чего возможно рассмотрение более сложных контрукций цилиндров, если вдруг имеющихся не хватит, чтобы покрыть все, а именно, если останутся непокрытые точки. Эту часть можно сделать с помощью перебора цилиндров в явном виде, а проверку на полярность осуществлять с помощь соответствующей программы в sagemath.

Наиболее подходят для рассмотрения конусы типов $B_2 = Cone(-K, E_1, E_2)$ и $B_3 = Cone(-K, E_1, E_2, E_3)$.

Среди используемых цилиндров есть две классические конструкции.

В первой мы рассматриваем произвольную точку P_i и Q_i конику через оставшиеся пять точек. Далее мы проводим касательные T_i и T_i' из этой точки к конике. Получаем два цилиндра

$U_i = Y \sim \phi^{-1}(Q_i \cup T_i), U_i' = Y \sim \phi^{-1}(Q_i \cup T_i')$, где Y – наша поверхность, а ϕ^{-1} – раздутие $\mathcal{P}^2$, которое дает нашу поверхность [4].

Во второй конструкции мы рассматриваем прямые L_{ab}, L_{cd} через пары точек P_a, P_b и P_c, P_d соответственно, причем множества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ не пересекаются. Получаем цилиндр $U_{abcd} = Y \sim \phi^{-1}(L_{ab} \cup L_{cd})$, где Y – наша поверхность, а ϕ^{-1} – раздутие $\mathbb{P}^2$, которое дает нашу поверхность [3].

Этих двух конструкций обычно хватает, чтобы покрыть почти все, за исключением некоторых точек.

Литература

[1] I. V. Arzhantsev, M. G. Zaidenberg and K. G. Kuyumzhiyan, Flag varieties, toric varieties, and suspensions: Three examples of infinite transitivity, Sb. Math. 203 (2012), no. 7, 923–949.

[2] J. Park and J. Won, Flexible affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4, Eur. J. Math. 2 (2016), no. 1, 304–318. [3] A. Y. Perepechko, Flexibility of affine cones over del Pezzo surfaces of degree 4 and 5 (in Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. 47 (2013), no. 4, 45–52; English translation, Funct. Anal. Appl. 47 (2013), no. 4, 284–289. [4] A.Y. Perepechko. Affine cones over cubic surfaces are flexible in codimension one. Received July 18, 2020; revised November 3, 2020