Колмогоровская сложность перечисления множеств

Захаров Георгий Шеховцов Александр

Руководитель: Мусатов Д.В.

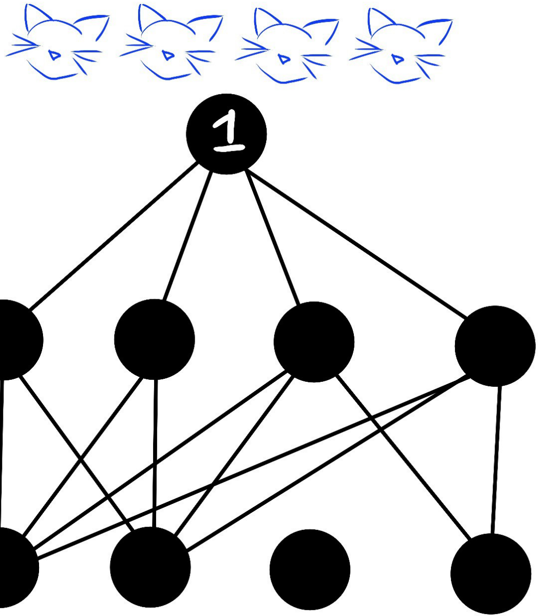
МФТИ

23 мая 2023 г.

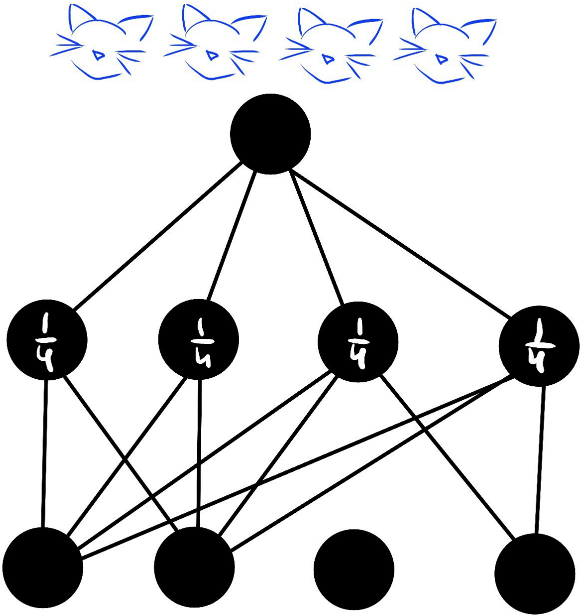
Формулировка игры Cats vs. Ants [Vereshchagin, 2007]

- Кошки и муравьи играют в игру
- У игры есть два параметра: $\frac{1}{n}$ и k
- Муравьи строят любой ориентированный граф без циклов и назначают вершину начальной
- Сначала k кошек и муравьи (отрезок $[0, 1]$) в начальной вершине
- Кошки и муравьи ходят по очереди
- За ход можно двигаться по ребрам графа
- При этом муравьи могут разделяться: любое множество муравьев можно поделить на несколько измеримых подмножеств
- После хода муравьев коты за свой ход должны встать так, чтобы любая вершина, где множество муравьев меры хотя бы $\frac{1}{n}$, было покрыто хотя бы одним котом
- Если муравьи могут сыграть так, чтобы после некоторого конечного числа ходов условие выше не было выполнено, они выигрывают при данных параметрах, иначе победителями считаются кошки

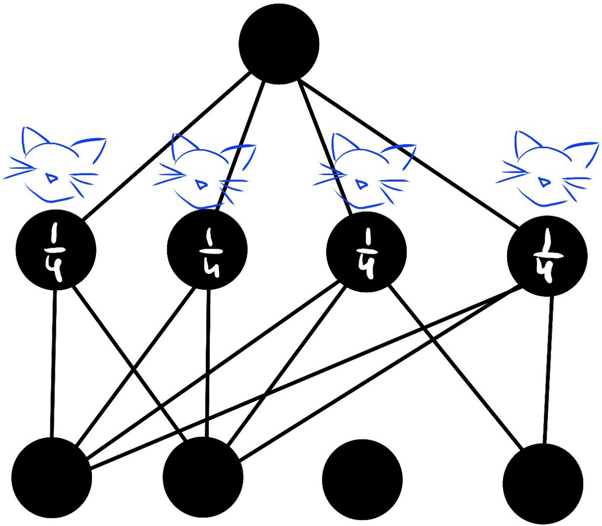
Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



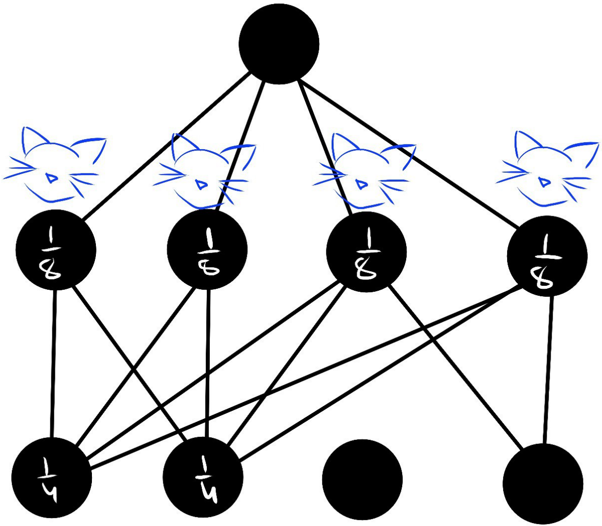
Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



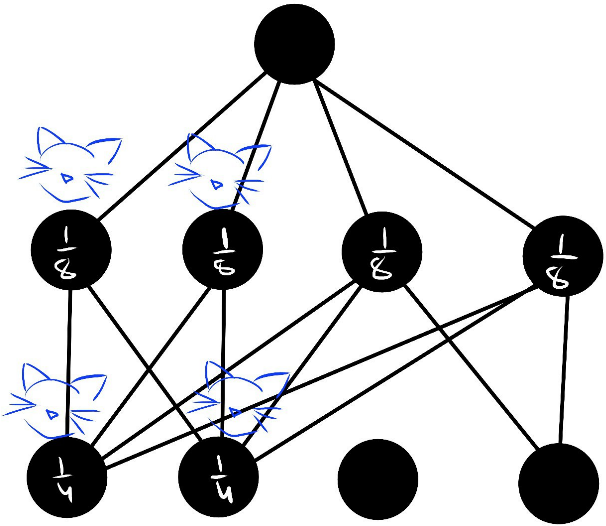
Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



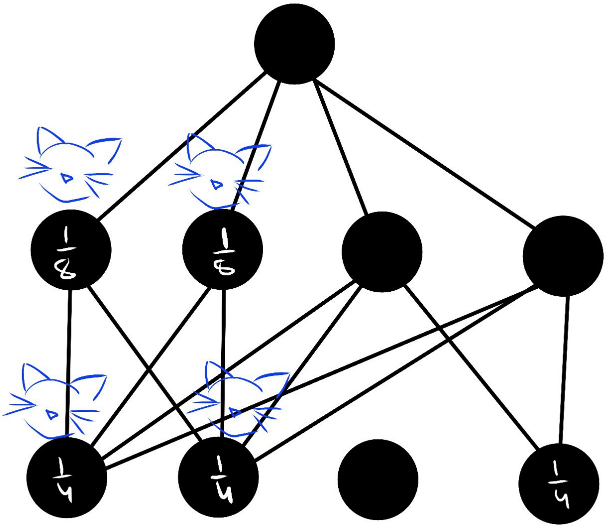
Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



Пример игры Cats vs. Ants с параметрами $(\frac{1}{4}, 4)$



Введение

Определение

Пусть M — машина Тьюринга интерпретирующая входную ленту как программу.
Пусть M' — машина Тьюринга у которой есть лента на которой написана случайная последовательность из нулей и единиц. Каждая последовательность выбирается равновероятно.

Детерминированная сложность множества

Детерминированной сложностью подмножества $A \subset \mathbb{N}$ назовём минимальную длинну программы для M, что на ней M перечисляет A.
Обозначение — $I(A)$.

Рандомизированная сложность множества

Рандомизированной сложностью подмножества $A \subset \mathbb{N}$ назовём минус двоичный логарифм вероятности, что M' перечислит A. Обозначение — $H(A) := -\log_2 R(A)$.

Мотивация игры

Ключевая лемма [Vereshchagin, 2007]

Если для некоторой константы c в $(\frac{1}{n}, cn^{\alpha})$—игре выигрывают кошки, то верно

$$I(S) \leq \alpha H(S) + O(log(H(S)))$$

Если же выигрывают муравьи, то верно

$$I(S) \geq \alpha H(S) - O(log(I(S)))$$

.

Известные оценки

Теорема [Solovay, 1977], $|A| = \infty$

$$I(A) \leq 3H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Теорема [Vereshchagin, 2007], $|A| < \infty$

$$I(A) \leq 2H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Замечание

Доказательство оценки для конечных множеств основывается на алгоритме для игры Мартина [Ageev, 2002]. Для нас этот алгоритм является идейным вдохновителем функции *cover*.

Широта графа

Определение

Назовем **критическим моментом** кошки момент времени, когда она переместилась в последний раз и больше не двигалась с того момента времени.

Определение

Для каждой кошки назовем её **критическим множеством** множество муравьев размера $\frac{1}{n}$, до которого она переместилась в ее критический момент времени.

Лемма о критических множествах

Рассмотрим граф из кошек. Введем отношение достижимости одной кошкой вершину другой кошки, как отношение частичного порядка. Тогда не существует антицепи размера $n + 1$.

Широта графа

Вспомогательная лемма

Если **критические множества** кошек пересекаются, то из вершины одной кошки можно добраться в вершину другой

Доказательство вспомогательной леммы

Пусть критические множества кошек A и B пересеклись и пусть критический момент A был раньше B, тогда в свой критический момент кошка B должна была спуститься в подграф A. Так как они обе с того момента не двигались, то они связаны отношением порядка. Это значит, что в любой антицепи критические множества кошек дизъюнктивны. Как следствие их не может быть больше n.

Доказательство леммы о критических множествах

В любой антицепи критические множества кошек дизъюнктивны. Как следствие их не может быть больше n.

Инвариант

- За $cover(S)$ будем обозначать множество всех котов, которые могут добраться хотя бы до одного муравья из множества S.
- Будем поддерживать следующий инвариант:
- $$\forall S : \mu(S) \cdot n \in \mathbb{Z} : |cover(S)| \geq f(\mu(S))$$
- где $f(n)$ определим позднее.

Инвариант

Применение идеи

Лемма. Для любого графа n^n котов побеждают.

Доказательство

Очевидно, что после хода муравьев инвариант не ломается.
Пусть после хода муравьев, группа муравьев $A, \mu(A) \geq \frac{1}{n}$ скопилась вершине v. Рассмотрим граф K на кошках которые могут добраться до v. Рассмотрим в нём стоки. По лемме о критических множествах, стоков не больше чем n. Следовательно, найдется такой кот из этих стоков, что в него могу добраться хотя бы $\frac{|K|}{n}$ котов из K.
Отправим этого кота накрывать A.
Предположим, что для какого-то подмножества S' муравьев инвариант сломался.
Но тогда:

$$|cover(S' \cup A)| \geq f\left(\mu(S') + \frac{1}{n}\right)$$

Доказательство

Следовательно,

$$|cover(S')| \geq \frac{f\left(\mu(S') + \frac{1}{n}\right)}{n} - 1$$

Чтобы инвариант выполнялся, нужно чтобы:

$$\frac{f\left(\mu(S') + \frac{1}{n}\right)}{n} - 1 \geq f(\mu(S'))$$

$$f\left(\mu(S') + \frac{1}{n}\right) \geq f(\mu(S')) \cdot n + n$$

По индукции можно показать, что в качестве f можно взять:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = 2 \cdot n^{k-1} + n^{k-2} + ... + n$$

Инвариант

Опеределение

Рассмотрим такую функцию $h(\alpha, t) : [0, 1] \times \mathbb{Z}_+ \to 2^{\{1 \dots n\}}$, которая выдает по муравью α и моменту времени t номера котов, для которых выполнено данное условие: все коты, которые в момент времени t могут добраться до муравья α, также могут добраться и до котов $h(\alpha, t)$.
Назовем игру **хорошей**, если в ней для любого момента времени t и любого активного муравья α, который в ход t переместился из v в u, найдется такой индекс i, что $i \in h(\alpha, t)$ и кот с индексом i может добраться до вершины u.

Применение идеи

Лемма. Для хороших игр n^2 котов побеждают.

Текущие результаты

Лемма о критических множествах

Рассмотрим граф из кошек. Введем отношение достижимости одной кошкой вершину другой кошки, как отношение частичного порядка. Тогда не существует антицепи размера $n+1$.

Оценка для всех игр

Для всех игр n^n котов побеждают.

Оценка для хороших игр

Для хороших игр n^2 котов побеждают.

Ссылки

Ageev, M. (2002).
Martin's game: a lower bound for the number of sets.
Theoretical Computer Science, pages 871–876.

Solovay, R. (1977).
On random r.e. sets.
Non-Classical Logics, Model Theory and Computability, pages 283–307.

Vereshchagin, N. K. (2007).
Kolmogorov complexity of enumerating finite sets.
Information Processing Letters, pages 34–39.

Спасибо за внимание