Задача перечисления множеств

Руководитель: Мусатов Д.В.

Шеховцов Александр, Захаров Георгий

МФТИ

23 мая 2023 г.

Введение

Определение

Пусть M — машина Тьюринга интерпретирующая входную ленту как программу.
Пусть M' — машина Тьюринга у которой есть лента на которой написана случайная последовательность из нулей и единиц. Каждая последовательность выбирается равновероятно.

Детерминированная сложность множества

Детерминированной сложностью подмножества $A \subset \mathbb{N}$ назовём минимальную длинну программы для M, что на ней M перечисляет A. Обозначение — $I(A)$.

Рандомизированная сложность множества

Рандомизированной сложностью подмножества $A \subset \mathbb{N}$ назовём минус двоичный логарифм вероятности, что M' перечислит A. Обозначение — $H(A) := -\log_2 R(A)$.

Известные оценки

Theorem (Vereschchagin), $|A| < \infty$

$$I(A) \leq 2H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Theorem (Solovay), $|A| = \infty$

$$I(A) \leq 3H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Известные оценки

Theorem (Vereschchagin), $|A| < \infty$

$$I(A) \leq 2H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Оценка получается из игры Мартина.

Theorem (Solovay), $|A| = \infty$

$$I(A) \leq 3H(A) + 2\log H(A) + O(1)$$

Оценка получается из игры Мартина и дополнительного параметра λ, который занимает $H(A)$ бит.

Случай бесконечных множеств

Переформулировка

Дано k. Необходимо представить наименьшее возможное количество машин Тьюринга $M_1, \ldots, M_m$, таких что любое множество A с $\mu(A) \geq \frac{1}{2^k}$ будет перечислено хотя бы одной из этих машин.

Определение

Пусть $A_1, ..., A_N$ — все множества, что $\mu(A_i) \geq \frac{1}{2^k}$.

$$\lambda \overset{def}{=} \mu(A_1) + ... + \mu(A_N)$$

Лемма

Если $|A| < \infty$, то

$$\mu^t(A) \to \mu(A)$$

Случай бесконечных множеств

Проблема

Если $|A| = \infty$, то $\mu^t(A) = 0 \not\to \mu(A)$

Определение

Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Определим $A\downarrow_n = \{B \subset \mathbb{N} : B \cap [n] = A \cap [n]\}$

Лемма

$$\mu^t(A\downarrow_n) \to \mu(A\downarrow_n)$$

Случай бесконечных множеств

Утверждение

$$\mu^t(A_i \downarrow_n) \to \mu(A_i \downarrow_n)$$

$$\mu^t(A_1 \downarrow_n \cup \ldots \cup A_N \downarrow_n) \to \mu(A_1 \downarrow_n \cup \ldots \cup A_N \downarrow_n) \geq \lambda$$

Идея

Для каждого n, найти подходящее t_n при котором $\mu^{t_n}(A_1 \downarrow_n \cup \ldots \cup A_N \downarrow_n) \geq \lambda - \varepsilon$

Идея

Пусть наши машины перечисляет множества $C_1, \ldots, C_L$. Тогда $\mu(C_1) + \ldots + \mu(C_L) \geq \lambda$. Пусть A_i не перечисляется ни одной из машин. Но тогда

$$\mu(C_1) + \ldots + \mu(C_L) + \mu(A_i) \geq \lambda + \frac{1}{2^k}$$

Противоречие.

Случай бесконечных множеств

Определение

Определим λ_k как λ с точностью до $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Программа для детерминированной машины Тьюринга

$p = 0^{\log k}(\textit{binary notation of } k)(\lambda_k)(\textit{index of the machine})$

Продвижения в частных случаях

Лемма

Пусть машине Тьюринга разрешено перечислять множество по порядку. То есть, если она перечислила число x, то числа $< x$ перечислять уже не может. В этом случае,

$$I(A) \leq H(A) + O(\log H(A))$$

Замечание

Пусть $A, B \subset \mathbb{N}, |A|, |B| < \infty$. Пусть $d = \min\{\max A, \max B\}$. Тогда, если $A \downarrow_d \neq B \downarrow_d$, то перечислив A рандомизированная машина Тьюринга уже не может перечислить B.

Продвижения в частных случаях

Идея доказательства

- Построим граф, где вершины — конечные множества, ребро есть между двумя множествами, если одно вкладывается в другое, и нет ребер между множествами A и B из замечания. Можно показать, что данный граф будет деревом.
- Будем представлять детерминированные машины Тьюринга как котов, а рандомизированные как муравьев.
- Будем поддерживать инвариант, что для любого подмножества муравьев S размера, не меньшего чем $\frac{1}{2^{(k+1)}}$, его покрывают как минимум $2^{(k+1)}\mu(S)$ кошек.
- Будем поддерживать инвариант, что для каждого поддерева, где есть хотя бы $\frac{1}{2^{(k+1)}}$ муравьев, есть также хотя бы один кот.
- Бесконечное множество соответствует бесконечному пути в этом графе. Можно показать, что для каждого такого пути, у которого вероятность не менее $\frac{1}{2^k}$, найдется кошка, которая будет идти по этому пути.

Продвижения в частных случаях

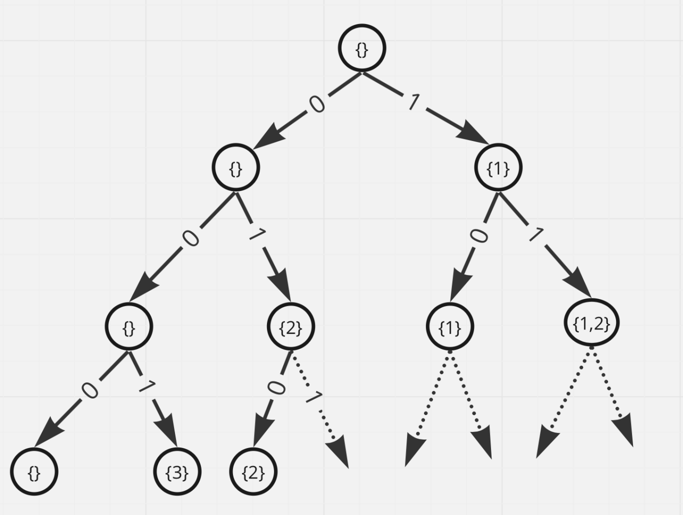

Рис.: Граф перечисления

Продвижения в частных случаях

Лемма

Пусть машине Тьюринга разрешено перечислять слова в порядке возрастания их длины. То есть, если она перечислила число в промежутке от 2^n до 2^{n+1}, то числа $< 2^n$ перечислять уже не может. В этом случае,

$$I(A) \leq 2H(A) + O(\log H(A))$$

Замечание

Пусть $A, B \subset \mathbb{N}$, где $\max A \leq \max B$. Если для какого-то $n, 2^{n+1} \leq \max A$, $A \downarrow_{2^n} \neq B \downarrow_{2^n}$, то перечислив A машина Тьюринга уже не может перечислить B.

Продвижения в частных случаях

Идея доказательства

- Построим граф, где вершины — конечные множества, ребро есть между двумя множествами, если одно вкладывается в другое, и нет ребер между множествами A и B из замечания.
- Будем симулировать на нём игру Мартина при 2^{2k} котов.
- Ребро может идти из вершины одного блока в вершину другого блока, если соответствующие блоки соединены ребром.
- Будем поддерживать инвариант, что для каждого поддерева блоков, где есть хотя бы $\frac{1}{2^{(k+1)}}$ муравьев, есть также хотя бы один кот.

Продвижения в частных случаях

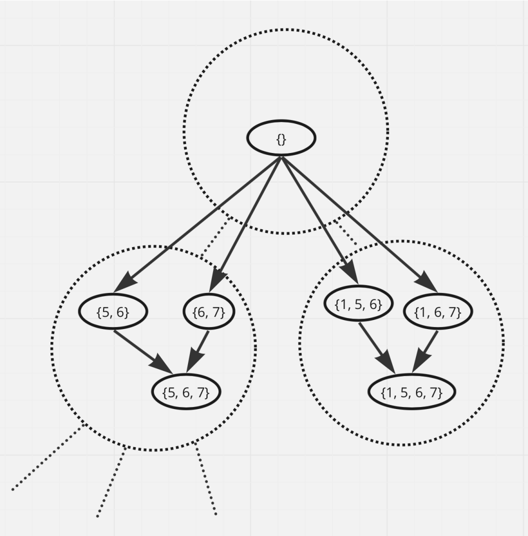

Рис.: Граф перечисление с выделенной древесной структурой

Продвижения в частных случаях

Идея доказательства

- Опишем как поддерживать инвариант. Пусть образовалось поддерево, в котором нет кота, но более $\frac{1}{2^{k+1}}$ муравьев. Разыграем это множество муравьев в игре Мартина. Тогда выигрышная стратегия выделит кота. Его можно будет отправить в корневую вершину этого поддерева.
- Бесконечное множество соответствует бесконечному пути в этом графе, начинающемуся в корне. Пусть $\mu(A) \geq \frac{1}{2^k}, |A| = \infty$. Тогда для любого n, выполняется $\mu^t(A\downarrow_n) \to \mu(A\downarrow_n) \geq \mu(A) \geq \frac{1}{2^k}$.
- То есть начиная с какого-то t выполнено $\mu^t(A\downarrow_n) \geq \frac{1}{2^{k+1}}$.
- Следовательно, по инварианту в поддереве соответствующему $A\downarrow_n$ будет кот. Рассмотрим таких котов для каждого n. Возьмем того, кто будет встречаться бесконечное число раз. Этот кот и будет перечислять A.

Случай бесконечных множеств

Данные результаты можно применить, когда вместо рандомизированных машин Тьюринга, слова перечисляются конечными автоматами. Автоматы перечисляют слова в порядке увеличения их длины.

Открытая задача 1

Какие еще ограничения на машину Тьюринга можно наложить, чтобы избавиться от λ или улучшить оценку каким-то другим способом?

Открытая задача 2

Можно ли улучшить оценку для мультимножеств с конечным числом различных элементов?

Результаты

- Исследована техника доказательства оценки для конечных и бесконечных множеств, которая применяется в статьях [1] и [2].
- Продвижения для бесконечных множеств с ограничениями на машину Тьюринга.
- Изучены применения для конечных автоматов.
- Сформулированы открытые задачи.

References

- 1. *Solovay, R.M.* On random R.E. sets, in: *A.I. Arruda, N.C.A. da Costa, R. Chaitin (Eds.)* // Non-Classical Logics, Model Theory and Computability, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 283–307.
- 2. *Vereshchagin, N.K.* (2007). Kolmogorov complexity of enumerating finite sets // Information Processing Letters, 103(1), 34-39.
- 3. *K. de Leeuw, E.F. Moore, C.E. Shannon, N. Shapiro*, Computability by probabilistic machines, in: C.E. Shannon, J. McCarthey (Eds.) // Automata Studies, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956, pp. 183–212.
- 4. *Martin, D.A.* (1978). Borel indeterminacy // Annals of Mathematics, 102, 363-371.