Оценки на функцию Беллмана в задаче оптимального управления с особым режимом второго порядка

Оганнес Айрапетян

ФПМИ МФТИ, группа Б05-206

25 марта 2025 г.

Цели исследования

1. Изучение асимптотики $V(t, x)$ вблизи особых траекторий
2. Построение оценок для сингулярных составляющих
3. Анализ устойчивости решений уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана (HJB)
4. Применение к задачам с вырожденным гамильтонианом
5. Методи приблизителних оценок
6. Источники

Обшая постановка задачи:

$$\min \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \|x(t)\|_2^2\, dt = -\omega(x_0, y_0)$$

Функционал стоимости:

$$V(t,x) = \inf_u \mathbb{E}\left[\int_t^T L(x,u)\, ds + \Phi(x_T)\right]$$

Особый режим 2-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & \text{для } u \in U = \{u \mid \|u\|_2 \le 1\}, \\ \dot{y} = u, & x, y, u \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x, \nabla_x V\right) = 0$$

Гамильтониан и принцип максимума:

$$x = -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, u \rangle$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = x \\ \dot{\psi} = -\phi \end{cases}$$

$$\dot{u} = \frac{\psi}{\|\psi\|}$$

Ключевая проблема: Вырожденность H в особых точках.

Основные результаты (Теорема 7.2.1)

Асимптотика функции Беллмана:

$$V(t,x) = V_0(t,x) + \epsilon^{3/2} V_1(t,x) + O(\epsilon^2)$$

Оценка главного члена:

$$V_0(t,x) \sim \mathrm{dist}(x,\Gamma)^{3/2}, \quad \Gamma \text{ — особая поверхность}$$

Ограничение на производные:

$$|D_x^2 V(t,x)| \leq C \cdot \mathrm{dist}(x,\Gamma)^{-1/2}$$

Идеи доказательства

1. **Регуляризация задачи:**

$$H_\epsilon = H + \epsilon \frac{\partial^4 H}{\partial u^4}$$

2. **Асимптотическое разложение:**

$$V = V_0 + \epsilon^{3/2} V_1 + \dots$$

3. **Априорные оценки:** Использование методов теории сингулярных возмущений.

Численная реализация

Дискретизация HJB:

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \Delta t \cdot H\left(x_j, \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

Стабилизация:

$$+\frac{\epsilon \Delta t}{2} \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Точность: $O(\Delta t + \Delta x^2 + \epsilon)$

1. **x(0) и y(0) параллелние:** Аналитическое решение для основной функции.
2. **Автомодельное-аналитическое:**

Симметрии: O(2) повороти и утверждение Фуллера: Если (x(t), y(t)) решение, то $(\mathrm{p}^2 x(t/p), py(t/p))$

Пример (по п. 7.2.3)

Система:

$$\dot{x} = u^3 - x, \quad |u| \leq 1$$

Особый режим: $u = 0$
Асимптотика $V(t, x)$**:**

$$V(t, x) \approx |x|^{3/2} \cdot \Phi(t)$$

Оптимальное управление:

$$u^* \sim \mathrm{sign}(x) \cdot |x|^{1/4}$$

Литература

1. Зеликин, Борисов. «Теория чата в оптимальном управлении». Глава 7.2.
2. Fleming, Soner. «Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions».
3. Krylov. «Controlled Diffusion Processes».
4. Lions. «Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations».

Заключение

- Ставлена обшая постановка задачи
- Главние основние результати виделени и идеи доказательств
- Перспективы: задачи с шумом и частичной наблюдаемостью

Спасибо за внимание!