Гибридный алгоритм решения задачи линейного программирования

студент Богданов Азат Газимович
руководитель Хильдебранд Роланд

Введение

В работе рассматривается задача линейного программирования(ЛП)

$$\min_{x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^m} \langle c, x \rangle : Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times m},\ b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^m$$

Для нее двойственная задача имеет вид

$$\max_{s \geq 0,\ s \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n} \langle y, b \rangle : s + A^T y = c$$

Условие оптимальности можно записать так

$$\langle s, x \rangle = 0$$

Постановка задачи

Усовершенствовать гибридный алгоритм на основе метода внутренней точки (МВТ), использующий решение аппроксимирующих задач на основе конусов Дикина и уменьшения размерности, основывающийся на требовании оптимальности решения

Основная идея

Вместо исходной задачи решаем вспомогательную, которая аппроксимирует.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} (\langle c, x \rangle + \mu \cdot F(x)) : \mu > 0, \; F(x) = -\sum_{i=1}^{m} log x_i$$

Где μ - параметр, F(x) - барьер, который неявно задает ограничение нахождения решения строго внутри ортанта.

На основе этого барьера получаем эллипсоид Дикина

$$E_{\omega,F} = \{\omega + u \mid u^T F''(\omega) u \leq 1\} : \omega \in \mathbb{R}^m, \omega \geq 0, u \in \mathbb{R}^m$$

А на основе него конус, в котором мы аналитически ищем решение.

Основная идея

Таким образом мы можем получить верхнюю оценку решения исходной задачи ЛП. Для этого решения мы вдоль оптимального направления выходим на границу ортанта, гиперплоскость, образованную x_i = 0. Рассмотрим пару

x_i, s_i . Требуется условие $x_i \cdot s_i = 0$

Аппроксимирующие конусы построены для прямой и обратной задач, поэтому они ограничивают ортант снаружи и снутри.

Основная идея

Из условия $x_i \cdot s_i = 0$ следует, что $x_i = 0$ либо $s_i = 0$.

Предположим, что $x_i = 0$. Тогда в аппроксимационной задаче появляется требование данное требование. И если, решение данной задачи V будет выше оптимума V* V>V*, то предположение неверное, значит $s_i = 0$. Аналогично для двойственной задачи. Однако может случиться такое, что мы не отметем пару. Тогда перейдем к следующей.

Задачи

1. Вывести аналитические решения для модифицированных вспомогательных задач.

2. Реализовать алгоритм, их считающий.

3. Получить оценки на количество переменных, которые отметаются алгоритмом.