

Оценки чисел Рамсея для произвольных последовательностей графов

Докладчик: Беремкулов Алан

Научный руководитель: Райгородский Андрей Михайлович

МФТИ

18 марта 2025 г.

Числа Рамсея

Напоминание:

- ▶ Числом Рамсея $R(m, n)$ называют наименьшее натуральное число N , такое что в полном графе на N вершинах при раскраске ребер в два цвета найдется либо клика на m вершинах первого цвета, либо клика на n вершинах второго цвета.
- ▶ $\alpha(G)$ - число независимости графа G , мощность максимального по размеру независимого множества в графе.

Числа Рамсея для последовательностей графов

Определение:

- ▶ Дана произвольная последовательность графов $\{G_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим за $R_{\min}(\{G_n\}, k)$ минимальное натуральное m , такое что для любого остовного подграфа G графа G_m либо в G , либо в $G_m \setminus G$ есть индуцированный подграф графа G_m на k вершинах. $G_m \setminus G$ следует понимать как дополнение графа G до графа G_m .
- ▶ Аналогично определим $R_{\max}(\{G_n\}, k)$ как максимальное натуральное m , такое что существует остовный подграф G графа G_m , что ни в нем, ни в $G_m \setminus G$ нет индуцированных k -вершинных подграфов графа G_m .

Числа Рамсея для последовательностей графов

Обозначая за K_n полный граф на n вершинах, становится понятно, что

$$R(k, k) = R_{\min}(\{K_n\}, k) = R_{\max}(\{K_n\}, k) + 1$$

Причиной тому служит то, что у K_n нет индуцированных подграфов не являющихся кликами.

Так же, в силу определения:

$$R_{\min}(\{G_n\}, k) \leq R_{\max}(\{G_n\}, k) + 1$$

Известные результаты

- ▶ графом Джонсона $G(n, r, s)$ называется граф, где вершинами служат все возможные r -элементные подмножества множества $\{1, 2, \dots, n\}$, а ребрами соединены те подмножества, у которых мощность пересечения ровно s
- ▶ Теорема 1: Пусть $r = r(n)$, $s = s(n)$, при этом:
 1. Если при всех достаточно больших n выполнено $r - s \geq 2$, то $r^3 = o(n / \ln n)$.
 2. Если при всех достаточно больших n выполнено $r - s = 1$, то $r^3 = o(n / \ln^3 n)$.
 3. Функции C_n^r и C_{n-s}^{r-s} строго монотонно возрастают.

Тогда существует такое K_0 , что для любого $k \geq k_0$ имеет место точное равенство:

$$R_{\max}(\{G(n, r, s)\}, k) = m$$

Где m таково, что $C_{m-s(m)}^{r(m)-s(m)} < k \leq C_{m+1-s(m+1)}^{r(m+1)-s(m+1)}$

Известные результаты

- Теорема 2: Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $N_n = |V_n|$, $\alpha_n = \alpha(G_n)$. Пусть γ_n - это максимальное число вершин графа G_n , которые не смежны с обеими вершинами данного ребра. Допустим, величины N_n, α_n, γ_n монотонно стремятся к бесконечности, причем $\alpha_n = o(N_n)$ и существует такая функция β_n , что выполнены следующие условия:
1. $\beta_n > \gamma_n, \beta_n = o(\alpha_n)$
 2. $\log_2 N_n = o(\frac{\alpha_n}{\beta_n})$
 3. $\log_2 N_n = o(\beta_n - \gamma_n)$

Пусть ϕ_n - любая функция, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и с которой все еще верно, что

$\log_2 N_n = o(\phi_n(\beta_n - \gamma_n))$. Тогда существует такое k_0 , что для любого $k \geq k_0$ выполнено неравенство

$R_{\max}(\{G_n\}, k) \geq m$, где m - максимальное натуральное число, удовлетворяющее условиям

$k \geq \alpha_m(1 + \phi_m), k < N_m$. Если же m таково, что $k \leq \alpha_m$, то $R_{\max}(\{G_n\}, k) < m$

Известные результаты

- ▶ Первая теорема дает точное значение числа Рамсея для некоторого семейства графов.
- ▶ Вторая теорема дает асимптотическое значение числа Рамсея для некоторого семейства графов.
- ▶ Заметим, что $K_n = G(n, 1, 0)$, и в таком случае условия обеих теорем нарушается, так как в первом случае функция $C_{n-s}^{r-s} = C_{n-1}^0$ не возрастает, а во втором случае число независимости $\alpha_n = 1$ также не возрастает.

Что по R_{min} ?

Пусть дана последовательность графов $\{G_n\}$. Заметим, что если $\alpha(G_m) \geq k$ для некоторых натуральных m, k , то

$$R_{min}(\{G_n\}, k) \leq m$$

так как в качестве индуцированного подграфа из определения R_{min} можно взять независимое множество размера k . Заметим, что $\alpha(G(n, r, s)) \geq C_{n-s-1}^{r-s-1}$. В качестве независимого множества можно взять вершины графа удовлетворяющие следующему виду: $\{1, 2, \dots, s+1, n_1, n_2, \dots, n_{r-s-1}\}, s+1 < n_i \leq n$. Это наталкивает на следующий частный результат: при фиксированных r и s

$$R_{min}(\{G(n, r, s)\}, C_{t-s-1}^{r-s-1}) \leq t$$

План работы

- ▶ Найти больше интересных примеров последовательностей графов для изучения их чисел Рамсея
- ▶ Улучшить частный результат, представленный на предыдущем слайде

Литература



О числах Рамсея для произвольных последовательностей
графов

DOI: 10.31857/S2686954322010052