Автоморфизмы кривых Фаддеева

Докладчик: Никита Андрусов
Научный руководитель: Виктор Батырев

МФТИ

18 марта 2025 г.

Кривая Ферма и разветвлённое накрытие

Кривая Ферма

$$F : x^p + y^p = 1,\ (x, y) \in \mathbb{C}^2,\ p \text{ — \textit{простое}}$$

Её кольцо регулярных функций: $\mathbb{C}[F] = \mathbb{C}[x, y]/(x^p + y^p - 1)$
Поле рациональных функций: $\mathbb{C}(F) = Quot(\mathbb{C}[F])$
Прямая:

$$S : u + v = 1,\ (u, v) \in \mathbb{C}^2,\ \mathbb{C}[S] \cong \mathbb{C}[t]\ \mathbb{C}(S) \cong \mathbb{C}(t)$$

$\varphi : F \to S,\ \varphi : (x, y) \mapsto (x^p, y^p)$
$\varphi^* : \mathbb{C}(S) \hookrightarrow \mathbb{C}(F)$ — расширение Галуа степени p^2

$$Gal(\mathbb{C}(F)/\mathbb{C}(S)) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$$

Значит, существуют промежуточные расширения степени p

Кривые Фаддеева

Из теории Галуа промежуточным расширениям

$$\mathbb{C}(S) \hookrightarrow L \hookrightarrow \mathbb{C}(F), [L : \mathbb{C}(S)] = p$$

соответствуют накрытия кривых. Причём, поскольку $Gal\,(\mathbb{C}(F))/\mathbb{C}(S)))$ абелева, это будут накрытия Галуа:

$$F \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S, \mathbb{C}(C) = L$$

Получающиеся таким образом промежуточные кривые C — это кривые Фаддеева.
В своей работе [1] Фаддеев рассматривал такие кривые, в том числе и явно задавая их уравнением: $y^p = x^k(1-x)$, где $(k,p) = 1, (k+1,p) = 1$

Связь с комбинаторикой

Любой кривой, заданной уравнением, можно сопоставить многогранник Ньютона:

$x_1^{d_1} \cdot \ldots x_n^{d_n} \mapsto (d_1, \ldots, d_n),\ F(x) = \sum_d \alpha_d \cdot x^d \mapsto Conv(\ldots d \ldots)$

Кривым Фаддеева соответствуют "примитивные" треугольники площади $\frac{p}{2}$

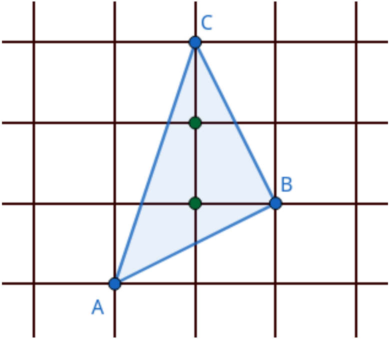

Рис.: Пример треугольника, соответствующего одной из кривых Фаддеева для $p = 5$

Квартика Кляйна

Один интересный частный случай — квартика Кляйна [3].

- Это одна из кривых Фаддеева при $p = 7$;
- Топологически это поверхность рода 3;
- Группа её алгебраических автоморфизмов — простая группа порядка 168 $PSL_2(\mathbb{F}_7)$. Это максимальный размер группы автоморфизмов для кривой рода 3;

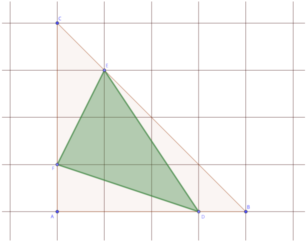

Рис.: Треугольник, который соответствует квартике Кляйна — $x^3 + xy^3 + y = 0$

- Треугольник, соответсвующий этой кривой, имеет автоморфизм порядка 3 — циклический сдвиг вершин;
- Из теории Галуа мы имеем автоморфизм порядка $p = 7$.

Задачи и подходы

Возможно, другие кривые Фаддеева обладают похожими свойствами и их группы автоморфизмов тоже интересны. Задача — выявить "хорошие" свойства групп автоморфизмов кривых Фаддеева.

Подход №1

При $p \equiv 1 \ (mod\, 6)$ имеется специальная кривая Фаддеева, имеющая автоморфизм порядка 3 аналогичный тому, что есть у квартики Кляйна. Можно изучить подгруппу автоморфизмов, порождённую этим автоморфизмом порядка 3 и автоморфизмом порядка p, пришедшим из теории Галуа.

Подход №2

Группа автоморфизмов квартики Кляйна действует на якобиане этой кривой. И изучение этого действия даёт результаты [2] при изучении самой группы автоморфизмов. Можно этот подход применить и к другим кривым Фаддеева. Для этого сначала надо изучить устройство их якобианов.

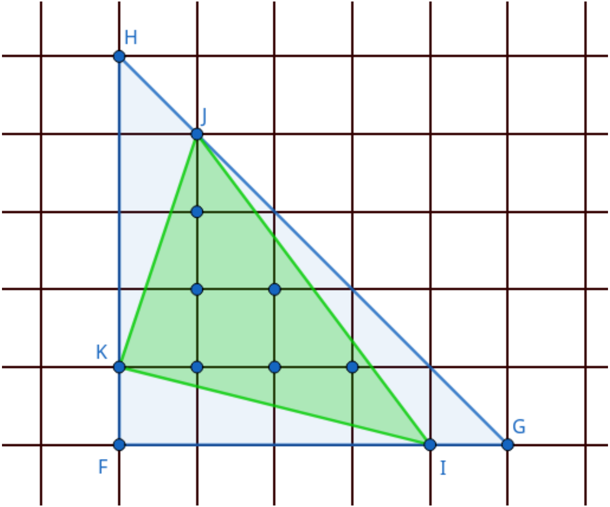

Рис.: Треугольник Ньютона для следующей после квартики Кляйна специальной кривой Фаддеева

Литература

- О группе классов дивизоров на некоторых алгебраических кривых — Фаддеев.
  Доклады академии наук, 1961
- Action of the automorphism group on the Jacobian of Klein's quartic curve — Markushevich, Moreau.
  doi 10.48550/arXiv:2107.03745
- The eightfold way: the beauty of Klein's quartic curve — Levy.
  doi 10.2307/3621193

Спасибо!

Вопросы можно задать лично или электронно:
@n_andrusov, andrusov.na@phystech.edu