Методы разделения операторов высокого порядка

Докладчик: **Наркевич Григорий Эдуардович**
narkevich.g@phystech.edu
Научный руководитель: **Голубев Василий Иванович**
Доктор физико-математических наук, доцент
w.golubev@mail.ru

ФПМИ МФТИ

18 марта 2025 г.

Цель исследования

1. Изучение различных методов разделения операторов для решения ОДУ
2. Улучшение стабильности данных методов
3. Оптимизация локальной погрешности
4. Построение метода разделения операторов с дробным шагом

Общая постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = \sum_k f^{[k]}(y), \tag{1}$$

Пускай $\varphi_t^{[j]}$ - поток векторного поля для

$$\frac{dy^{[j]}}{dt} = f^{[j]}(t, y^{[j]}) \tag{2}$$

Общая постановка задачи

Далее, рассмотрим производную Ли для каждой компоненты:

$$D_i = \sum_j f_j^{[i]}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \tag{3}$$

Тогда можно показать, что

$$\varphi_t^{[i]}(y_0) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} (D_i^k \mathrm{Id})(y_0) = \exp(tD_i)\mathrm{Id}(y_0). \tag{4}$$

Метод Годунова

В случае, если исходное ДУ разбивается формальным образом на два слагаемых, можно получить следующую известную оценку (метод Годунова):

$$\Phi_{\Delta t}(y_0) \approx \exp\left(D^{[2]}\Delta t\right) \exp\left(D^{[1]}\Delta t\right) \mathrm{Id}(y_0). \tag{5}$$

Здесь $\Phi_{\Delta t}(y_0)$ - решение исходного ДУ.

Важные известные факты

Лемма (Грёбнер, 1960). Пусть $\varphi_s^{[1]}$ и $\varphi_t^{[2]}$ — потоки дифференциальных уравнений $\dot{y} = f^{[1]}(y)$ и $\dot{y} = f^{[2]}(y)$ соответственно. Для их композиции тогда выполняется

$$\left(\varphi_t^{[2]} \circ \varphi_s^{[1]}\right)(y_0) = \exp(sD_1)\exp(tD_2)\ \mathrm{Id}(y_0). \tag{6}$$

Для самой же композиции справедливо:

$$\exp(D(s,t)) = I + D(s,t) + \frac{1}{2}D(s,t)^2 + \dots \tag{7}$$

$$= I + sD_1 + tD_2 + \frac{1}{2}\left((sD_1 + tD_2)^2 + st[D_1, D_2]\right) + \dots \tag{8}$$

Здесь $D(s,t) = \exp(sD_1)\exp(tD_2)$, $[\cdot]$ - скобка Ли.

Метод разделения операторов

Разделение операторов:

$$\Psi_h = \varphi^{[2]}_{b_m h} \circ \varphi^{[1]}_{a_m h} \circ \varphi^{[2]}_{b_{m-1} h} \circ \ldots \circ \varphi^{[1]}_{a_2 h} \circ \varphi^{[2]}_{b_1 h} \circ \varphi^{[1]}_{a_1 h}, \tag{9}$$

$$\varphi^{[2]}_{b_j h} \circ \varphi^{[1]}_{a_j h} = \exp\left(a_j h E_1^1 + b_j h E_2^1 + a_j b_j h^2 E_1^2 + a_j^2 b_j h^3 E_1^3 + \ldots\right) \mathrm{Id}, \tag{10}$$

где E_i^j:

$$E_1^1 = D_1, \quad E_2^1 = D_2, \quad E_1^2 = \frac{1}{2}[D_1, D_2], \quad E_1^3 = \frac{1}{12}[D_1, [D_1, D_2]], \tag{11}$$

$$E_2^3 = \frac{1}{12}[D_2, [D_2, D_1]], \quad E_1^4 = \frac{1}{24}[D_1[D_2, [D_2, D_1]]], \ldots \tag{12}$$

Известные результаты

Лемма. *Метод $\Psi^{(j)}$, определённый формулой (9), может быть формально записан в виде*

$$\Psi^{(j)} = \exp\left(c_{1,j}^1 h E_1^1 + c_{2,j}^1 h E_2^1 + c_{1,j}^2 h^2 E_1^2 + c_{1,j}^3 h^3 E_1^3 + c_{2,j}^3 h^3 E_2^3 + \dots\right) \mathrm{Id} \tag{13}$$

Теорема. *Метод имеет порядок p, если*

$$c_{1,m}^1 = c_{2,m}^1 = 1, \quad c_{\ell,m}^k = 0 \quad \text{при } k = 2, \dots, p \quad \text{и для всех } \ell. \tag{14}$$

Метод составления композиции

Рассмотрим композицию

$$\Psi_h = \Phi_{\alpha_s h} \circ \Phi^*_{\beta_s h} \circ \ldots \circ \Phi^*_{\beta_2 h} \circ \Phi_{\alpha_1 h} \circ \Phi^*_{\beta_1 h} \tag{15}$$

где Φ_h — метод первого порядка для $\dot{y} = f(y)$, а Φ^*_h — сопряжённый к нему. Полагаем, что

$$\Phi_h = \exp\left(hC_1 + h^2 C_2 + h^3 C_3 + \ldots\right) \mathrm{Id}, \tag{16}$$

Известные результаты

Лемма. *Метод* $\Psi^{(j)}$, *определённый формулой, может быть формально записан в виде*

$$\Psi^{(j)} = \exp\left(\gamma_{1,j}^{1} h E_1^1 + \gamma_{1,j}^{2} h^2 E_1^2 + \gamma_{1,j}^{3} h^3 E_1^3 + \gamma_{2,j}^{3} h^3 E_2^3 + \dots\right) \mathrm{Id}, \quad (17)$$

Теорема. *Метод композиции имеет порядок* p, *если*

$$\gamma_{1,m}^{1} = 1, \quad \gamma_{\ell,m}^{k} = 0 \quad \text{для } k = 2, \dots, p \text{ и всех } \ell. \quad (18)$$

Устойчивость и погрешность

1. Пусть $R_k^{[t]}(z)$ — функция устойчивости метода Рунге-Кутты, применяемого к оператору $f^{[t]}$ на этапе k. Тогда функция устойчивости получаемого метода имеет вид

$$R\left(z^{[1]}, z^{[2]}\right) = \prod_{k=1}^{s} R_k^{[1]}\left(\alpha_k^{[1]} z^{[1]}\right) R_k^{[2]}\left(\alpha_k^{[2]} z^{[2]}\right). \qquad (19)$$

2. Можно показать, что для метода порядка локальная ошибка $\mathcal{E}_{p+1}$ может быть записана в виде

$$\mathcal{E}_{p+1} = \frac{\Delta t^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{j=1}^{\gamma_{p+1}} \kappa_{p+1,j} K_{p+1,j} \qquad (20)$$

Литература

1. E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner, Geometric numerical integration: structure preserving algorithms for ordinary differential equations, vol. 31, Springer Science Busi ness Media, 2006.
2. S. K. Godunov, A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, Matematicheskii Sbornik, 89 (1959), pp. 271–306.
3. Improving the stability and efficiency of high-order operator-splitting methods Siqi Wei, Victoria Guenter, Raymond J. Spiteri
4. W. Auzinger, H. Hofst¨ atter, D. Ketcheson, and O. Koch, Practical splitting methods for the adaptive integration of nonlinear evolution equations. Part I: Construction of optimized schemes and pairs of schemes, BIT Numerical Mathematics, 57 (2017), pp. 55–74.
5. R. J. Spiteri and S. Wei, Fractional-step Runge–Kutta methods: Representation and linear stability analysis, Journal of computational physics, 476 (2023), p. 111900.

Спасибо за внимание!