

Грубые концы метрических пространств

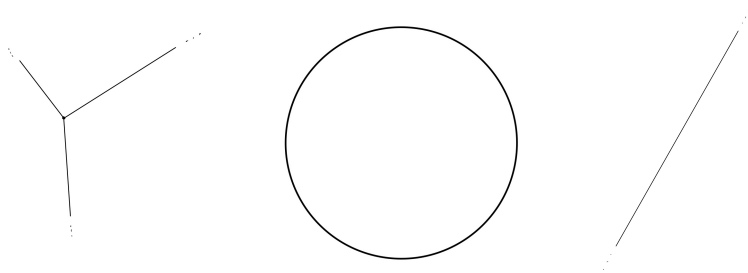
Старков Михаил

Научный руководитель: А. А. Арутюнов, ИПУ РАН

МФТИ

18 марта 2025 г.

Концы пространств (интуитивно)



У тройки лучей три конца; у окружности концов нет; у прямой два конца.

Определение

Метрическое пространство (X, ρ) называется M -связным, если для любых точек $A, B \in X$ существует набор точек $\{A_i\}_{i=0}^N \subset X$, такой что $A_0 = A$, $A_N = B$, $\rho(A_i, A_{i-1}) \leq M \forall i \in \overline{1, n}$.

Для метрического пространства X , ограниченного $Q \subset X$ и положительного числа μ обозначим через $\mathcal{U}_Q^{X, \mu}$ множество неограниченных компонент μ -связности в $X \setminus Q$.

Пусть X - метрическое пространство и существует последовательность ограниченных множеств, исчерпывающая X , т.е. такая $\{Q_i\}_{i=1}^\infty$, что

- 1 $\forall i : Q_i \subset Q_{i+1}$;
- 2 $\bigcup_{i=1}^\infty Q_i = X$.

Число концов пространства X определяется как

$$e_\mu(X) := \max_{i \in \mathbb{N}} |\mathcal{U}_{Q_i}^{X, \mu}|$$

Общие определения

$\varphi: (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$ - отображение метрических пространств.

Определение

Отображение φ называется собственным, если для каждого ограниченного $U \subset Y$, прообраз $\varphi^{-1}(U)$ ограничен.

Определение

Отображение φ называется борнологическим, если

$$\forall \delta > 0 \exists S_\delta \forall x, x' \in X : \rho_X(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) < S_\delta.$$

Определение

Отображение φ называется грубым, если оно собственное и борнологическое.

Как может меняться количество концов

Гипотеза

Пусть X, Y — метрические пространства, X μ -связно, $\varphi: X \rightarrow Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X: \rho_X(x, x') \leq \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geq e_\nu(Y)$.

Как может меняться количество концов

Гипотеза

Пусть X, Y — метрические пространства, X μ -связно, $\varphi: X \rightarrow Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X: \rho_X(x, x') \leq \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geq e_\nu(Y)$.

Контрпример

Возьмем «ежика» в $\mathbb{R}^\infty$: $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где $X_n := \{x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0, x_n \in [0, n], x_{n+1} = 0, \dots\} \subset \mathbb{R}^\infty$. Ясно, что у ежика нет концов.

В качестве φ возьмем функцию $x \mapsto \rho(x, 0)$. Получим грубое сюръективное отображение из ежика в $\mathbb{R}_{\geq 0}$, т.е. в пространство с одним концом.

Как может меняться количество концов

Гипотеза

Пусть X — собственное μ -связное метрическое пространство, Y — произвольное метрическое пространство, $\varphi: X \rightarrow Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X : \rho_X(x, x') \leq \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geq e_\nu(Y)$.

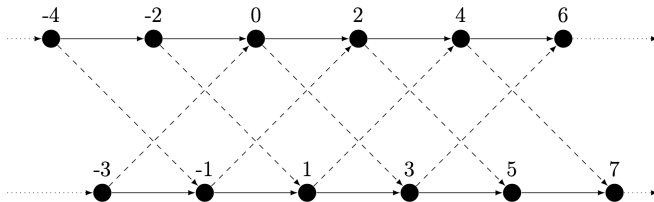
Графы Кэли

Пусть группа G задана набором образующих $\mathcal{X}$

Определение

Определим граф $\text{Cayley}(G, \mathcal{X})$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются элементы группы — $V(\text{sk}(G)) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathcal{X}$, если $ax = b$

Любой граф Кэли связан и вершинно-транзитивен.



Пример. Граф Кэли группы $\mathbb{Z}$ с образующими 2, 3.

Определение

Определим граф $sk(G)$ следующим образом. Пусть вершинами графа являются элементы группы — $V(sk(G)) := G$, и каждая пара вершин $a, b \in G$ соединена ориентированным ребром с меткой $x \in \mathcal{X}$, если $x^{-1}ax = b$

Обозначим компоненту связности элемента $u \in G$ через $sk_u(G)$.
Определим отображение $\zeta : \text{Cayley}(G, \mathcal{X}) \rightarrow sk_u(G)$ следующим образом.

- вершина g переходит в $g^{-1}ug$;
- Ребро, помеченное элементом $x \in \mathcal{X}$, переходит в ребро между вершинами, помеченное тем же элементом x .

Определенное таким образом отображение ζ является сюръективным и монотонным.

Число концов графа Кэли и диаграммы сопряженности

Теорема (Хопф)

Число концов графа $\text{Cayley}(G, \mathcal{X})$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

Гипотеза

Число концов графа $\text{sk}_u(G)$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

Идея: использовать свойства ранее определенного отображения $\zeta: \text{Cayley}(G, \mathcal{X}) \rightarrow \text{sk}_u(G)$ и гипотезу об изменении количества концов при сюръективном отображении.

Гипотеза 1

Пусть X — собственное μ -связное метрическое пространство, Y — произвольное метрическое пространство, $\varphi: X \rightarrow Y$ — грубое и сюръективное отображение. Пусть также для $\nu > 0$ выполнено

$$\forall x, x' \in X : \rho_X(x, x') \leq \mu \Rightarrow \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \nu.$$

Тогда $e_\mu(X) \geq e_\nu(Y)$.

Гипотеза 2

Число концов графа $sk_\mu(G)$ принадлежит множеству $\{0, 1, 2, +\infty\}$.

- [1] A. Arutyunov. Грубая геометрия. НМУ, 2024.
- [2] J. López and A. Candel. *Generic Coarse Geometry of Leaves*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2018.
- [3] J. Roe. Lectures on coarse geometry. 2003.

Спасибо за
внимание!