Улучшение верхних оценок диагональных чисел Рамсея

Минеев Дмитрий Александрович

Научный руководитель:

Райгородский Андрей Михайлович (ФПМИ МФТИ)

18.03.2025

Определение двухцветных чисел Рамсея

Опр. Пусть $k, \ell \in \mathbb{N}_1$. Двухцветным числом Рамсея $R_2(k, \ell)$ называется минимальное такое $n \in \mathbb{N}_1$, что при любой раскраске рёбер K_n в синий и красный цвета в нём найдётся или синяя клика размера k, или красная клика размера ℓ.

Опр. Пусть $k \in \mathbb{N}_1$. Диагональным двухцветным числом Рамсея называется $R_2(k) \coloneqq R_2(k, k)$.

Определение многоцветных чисел Рамсея

Опр. Пусть $r, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_1$, $r \geq 2$. Многоцветным числом Рамсея $R_r(k_1, \dots, k_r)$ называется минимальное такое $n \in \mathbb{N}_1$, что при любой раскраске рёбер K_n в цвета $1, \dots, r$ в нём найдётся или клика цвета 1 размера k_1, … , или клика цвета r размера k_r.

Опр. Пусть $r, k \in \mathbb{N}_1$, $r \geq 2$. Диагональным многоцветным числом Рамсея называется $R_r(k) \coloneqq R_r(k, \dots, k)$.

Известные результаты

Числа Рамсея										
$n,\ m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	9	14	18	23	28	36	[40, 42]
4	1	4	9	18	25	[36, 41]	[49, 61]	[59, 84]	[73, 115]	[92, 149]
5	1	5	14	25	[43, 48]	[58, 87]	[80, 143]	[101, 216]	[133, 316]	[149, 442]
6	1	6	18	[36, 41]	[58, 87]	[102, 165]	[115, 298]	[134, 495]	[183, 780]	[204, 1171]
7	1	7	23	[49, 61]	[80, 143]	[115, 298]	[205, 540]	[217, 1031]	[252, 1713]	[292, 2826]
8	1	8	28	[56, 84]	[101, 216]	[127, 495]	[217, 1031]	[282, 1870]	[329, 3583]	[343, 6090]
9	1	9	36	[73, 115]	[133, 316]	[183, 780]	[252, 1713]	[329, 3583]	[565, 6588]	[580, 12677]
10	1	10	[40, 42]	[92, 149]	[149, 442]	[179, 1171]	[289, 2826]	[343, 6090]	[581, 12677]	[798, 23556]

История

1930 г., Рамсей доказал, что $R_r(k_1, \dots, k_r)$ существует для любых $r, k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}_1, r \geq 2$, т.е. является конечным натуральным числом.

1935 г., Эрдёш и Секереш с помощью мат. индукции доказали асимптотическую (т.е. верную для достаточно больших k) верхнюю оценку

$$R_r(k) \leq r^{rk}.$$

Для частного случая $r = 2$ можно записать чуть более точную оценку

$$R_2(k) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{k-1}}{\sqrt{\pi k}}.$$

История

1947 г., Эрдёш с помощью вероятностного метода доказал асимптотическую нижнюю оценку

$$R_r(k) \geq r^{k/2}.$$

Для частного случая $r = 2$ можно записать чуть более точную оценку

$$R_2(k) \geq \left(1 + o(1)\right)\frac{k}{e\sqrt{2}}2^{k/2}.$$

История

В улучшении нижних оценок с этого времени не было практически никаких результатов. Максимум, который удавалось получить – умножение нижней оценки двухцветных чисел на константу. В частности, в 1977 г. Спенсер смог улучшить нижнюю оценку Эрдёша в 2 раза с помощью локальной леммы Ловаса, получив следующий, на данный момент, лучший результат:

$$R_2(k) \geq \big(1 + o(1)\big)\frac{k\sqrt{2}}{e}\,2^{k/2}.$$

История

В деле улучшения верхних оценок дела обстояли чуть лучше. Идеи Эрдёша развивали Томассен (1988 г.), Конлон (2009 г.)и Сах (2023 г.), что в итоге привело к получению следующей оценки для двухцветных чисел Рамсея

$$R_2(k) \leq 4^{k-c\ln^2 k},$$

где $c > 0$ – некоторая константа.

Можно заметить, что экспоненциального улучшения получить им так и не удалось.

Прорывной результат: экспоненциальное улучшение

В марте 2023 г. Кампос, Гриффитс, Моррис и Сахасрабух улучшили верхнюю оценку для двухцветных чисел Рамсея, впервые получив экспоненциальное улучшение. Они доказали, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$ верна оценка

$$R_2(k) \leq (4 - \varepsilon)^k.$$

Авторы работы не стремились оптимизировать значение ε. В их работе есть два доказательства, в одном из которых $\varepsilon = 2^{-7}$, а в другом 2^{-10}.

Новый подход

Главное, что в себе содержала статья Кампоса, Гриффитса, Морриса и Сахасрабуха, – это новый подход к получению оценок, отличный от того, что использовали предшествующие авторы. В статье они предъявляют специальный *книжный алгоритм* (*the book algorithm*) и доказывают, что с помощью него можно найти в любой раскраске графа одноцветную клику нужного размера.

Оптимизация ε

В июле 2024 г. Гупта, Ндиайе, Норин и Вей представили новую работу, в которой упростили и оптимизировали доказательство из работы 2023 г., получив следующую оценку для двухцветных чисел Рамсея:

$$R_2(k) \le 3.8^{k+o(k)}.$$

Адаптация для многоцветного случая

В октябре 2024 г. Балистер, Боллобаш, Кампос, Гриффитс, Хёрли, Моррис, Сахасрабух и Тиба адаптировали книжный алгоритм для многоцветного случая и получили по сути первое улучшение оценки Эрдёша и Секереша 1935 г. Они доказали, что для любого фиксированного $r \in \mathbb{N}_1, r \geq 2$ существует $\delta = \delta(r) > 0$ такое, что

$$R_r(k) \leq e^{-\delta k} r^{rk}$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}_1$.

Ссылки на литературу

- An exponential improvement for diagonal Ramsey (Marcelo Campos, Simon Griffiths, Robert Morris, Julian Sahasrabudhe), 2023 г.
- Optimizing the CGMS upper bound on Ramsey numbers (Parth Gupta, Ndiame Ndiaye, Sergey Norin, Louis Wei), 2024 г.
- Upper bounds for multicolour Ramsey numbers (Paul Balister, Béla Bollobás, Marcelo Campos, Simon Griffiths, Eoin Hurley, Robert Morris, Julian Sahasrabudhe, Marius Tiba), 2024 г.

Спасибо за внимание!